Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

С.А. Козлова, А.Г. Рубин, В.А. Гусев

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК • 7–9 классы

БАЛАСС

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

С.А. Козлова, А.Г. Рубин, В.А. Гусев

Геометрия

7–9 классы

Рекомендовано Министерством образования и науки РФ

Москва
БАЛАСС
2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
К59

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

Совет координаторов предметных линий «Школы 2100» – лауреат премии Правительства РФ в области образования за теоретическую разработку основ образовательной системы нового поколения и её практическую реализацию в учебниках

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (от 14.02.2011) № 10106-5215/818 и Российской академии образования (от 24.10.2011) № 01-5/7Д-109

Руководитель издательской программы – доктор пед. наук, проф., чл.-корр. РАО *Р.Н. Бунеев*

Козлова, С.А.
К59 **Геометрия. 7–9 кл.** : учеб. для общеобразоват. учреждений/ С.А. Козлова, А.Г. Рубин, В.А. Гусев. — М. : Баласс, 2013.— 320 с. (Образовательная система «Школа 2100»)

ISBN 978-5-85939-918-5

Учебник предназначен для учащихся 7–9 классов общеобразовательных учреждений. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, является продолжением непрерывного курса и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-85939-918-5

КАК РАБОТАТЬ С УЧЕБНИКОМ

Дорогие ребята!

Вы начинаете учиться в 7-м классе. Все предыдущие шесть лет вашего обучения в школе, начиная с 1-го класса, вы изучали математику. В 7-м классе вы продолжите изучение этой замечательной и очень важной науки, но теперь у вас будет два разных математических учебных предмета: алгебра и геометрия. С их отдельными фрагментами вы уже знакомы и знаете, что геометрия изучает геометрические фигуры и их свойства, а алгебра – буквенные выражения, уравнения, неравенства. Теперь вы займётесь всеми этими вопросами более полно и обстоятельно.

А так как учебных математических предметов будет два, то обучение математике, начиная с седьмого класса, будет проходить по отдельным учебникам – алгебры и геометрии, на отдельных уроках, а ваша работа по каждому из этих предметов будет оцениваться отдельными отметками.

Перед вами учебник геометрии для 7–9 классов Образовательной системы «Школа 2100». Так же, как и другие учебники этой системы, он поможет вам в развитии умений (действий), которые необходимы в жизни.

Напоминаем, что эти умения, или действия (они называются универсальными), развиваются через специальные задания, обозначенные в учебнике кружками и фоном условных знаков разного цвета. Каждый цвет соответствует определённой группе умений:

- организовывать свои действия: ставить цель, планировать работу, действовать по плану, оценивать результат;
- работать с информацией: самостоятельно находить, осмысливать и использовать её;
- общаться и взаимодействовать с другими людьми, владеть устной и письменной речью, понимать других, договариваться, сотрудничать;
- так обозначены задания, где нужно применить разные группы умений, мы называем их жизненными задачами и проектами.

Зачем мы будем учиться?

Изучая геометрию, вы научитесь работать с разнообразными геометрическими фигурами, узнаете многие их свойства и признаки, сможете узнавать их среди окружающих вас предметов, вычислять характеризующие их величины: длины, углы, площади, объёмы и др., строить многие из них с помощью циркуля и линейки, а также моделировать с их помощью некоторые реальные ситуации. Это поможет вам стать увереннее в себе, добиться успехов при решении возникающих в жизни задач, так как при этом очень часто придётся иметь дело с геометрическими фигурами.

Задания на развитие предметных умений в учебнике обозначены серым цветом.

Как мы будем учиться?

Для успешного изучения геометрии и овладения универсальными умениями на уроках открытия нового знания используется проблемный диалог (образовательная технология).

Приведённый в учебнике теоретический материал обозначен так:

Открываем новые знания

Основной теоретический материал, который необходимо знать каждому ученику, выделен слева на полях книги сплошной оранжевой чертой. Именно этот материал составляет основу курса.

Дополнительный теоретический материал (не выделенный оранжевой чертой на полях) предназначен для более глубокого изучения геометрии, её практического применения в науке и технике. Этот материал способствует вашему математическому развитию.

Кроме этого, в учебнике есть целые параграфы, адресованные только желающим, – на их изучение учебное время программой курса геометрии не отводится. Номера таких параграфов отмечены звёздочкой, и в их начале помещено изображение совы.

Приводимые исторические сведения помогут вам понять, как зарождалась и развивалась геометрия, какие события сопутствовали некоторым открытиям в геометрии.

Развиваем умения

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности.

Н **Необходимый уровень.** Эти задания должны уметь выполнять все учащиеся. Они помогут вам определить, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П **Повышенный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят углубить свои знания. Они требуют более серьёзного усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может понадобиться выдвижение некоторой новой идеи.

М **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные, нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом **ни на одном из уровней выполнение всех заданий, предложенных в учебнике, не является обязательным!** Ученики под руководством педагога выбирают задания в соответствии со своими возможностями и потребностями.

Среди заданий необходимого уровня мы дополнительно выделяем следующие две группы заданий и отмечаем их особыми знаками:

⇓ **Этим знаком обозначается группа задач и вопросов, которые *учат делать выводы*, т.е. получать следствия из условия задачи. С помощью этих заданий вы можете проверить, усвоен ли вами основной теоретический материал. Уметь справляться с такими заданиями должен каждый ученик.**

⇑ **Этим знаком отмечены *задания для самоконтроля*, в них нужно не только получить следствие из условия задачи, но и *выяснить причину появления этого следствия*.**

Примерно к половине всех заданий в конце учебника приводятся ответы.

Ориентироваться в учебнике вам помогут условные обозначения

? Вопросы, которые помогают понять тему, сделать вывод.

! Обратите особое внимание!

Это нужно запомнить.

Дополнительные сведения.

Работа в группе (паре).

Задания с использованием информационных технологий.

Самостоятельная исследовательская работа.

Жизненные задачи и проекты

Помимо обычных учебных заданий разного уровня сложности, в учебник включены жизненные задачи и проекты. Ими можно заниматься в свободное от уроков время в группах или индивидуально.

Что такое жизненная задача?

Жизненная задача – это модель реальной ситуации, для разрешения которой необходим набор математических знаний, к этому моменту вам уже в основном известных. При этом жизненная задача отличается от привычных всем школьных учебных задач. Это отличие прежде всего заключается в том, что для её решения вам может понадобиться дополнительная информация, которую придётся добывать самим, причём какая именно информация нужна, вы должны решать сами и самостоятельно искать источники этой информации. В случае затруднений вы можете обратиться к старшим товарищам, учителю или другим взрослым.

В условии жизненной задачи также могут содержаться избыточные данные. Ведь в жизни чаще всего так и бывает: когда пытаешься разобраться в ситуации и анализируешь, что тебе о ней известно, то далеко не вся эта информация пригодится, значительная её часть, как постепенно выясняется в ходе анализа, не имеет отношения к делу. Кроме того, для решения жизненной задачи будут необходимы знания не только из области математики, но и других изучаемых вами областей (как это и происходит в реальной жизни). Таким образом, систематическое решение жизненных задач даст вам возможность не только углубиться в математику, увидеть взаимосвязь математики и других областей знаний, но и совершенствоваться в умении самостоятельно работать с информацией.

Жизненные задачи, как принято в учебниках Образовательной системы «Школа 2100», оформлены следующим образом:

СИТУАЦИЯ. Условия, в которых возникла проблема.

ВАША РОЛЬ. Человек, в роли которого вы должны себя представить, решая проблему.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Более подробная характеристика ситуации.

ЗАДАНИЕ. Что нужно сделать или что нужно получить в итоге.

Что такое проект?

Это любое самостоятельное дело, которое предполагает:

1) оригинальный замысел (цель);

2) выполнение работы за определённый отрезок времени;

3) конкретный результат, представленный в итоге (мероприятие, решение проблемы, результат самостоятельных исследований и др.).

Проектная деятельность помогает научиться работать в команде, распределять роли таким образом, чтобы наиболее эффективно использовать сильные стороны каждого, участвовать в мозговых штурмах и других формах коллективной интеллектуальной деятельности, представлять результаты своего труда в форме доклада, презентации, инсценировки и т.д. Предполагается, что проекты будут выполняться в свободное от уроков время. Они не являются обязательными.

Структура учебника

Учебник разбит на разделы, разделы – на главы, а каждая глава – на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки – номер главы, а число справа от точки – номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе – отдельные вопросы этой темы.

В конце книги помещены приложения, которые помогут вам быстрее найти нужную информацию: *указатель аксиом, указатель теорем, указатель определений* и *тематический указатель.*

Кроме перечисленных выше обозначений, вы встретите на страницах книги и другие знаки, смысл и предназначение которых сейчас будут объяснены.

Некоторые утверждения в геометрии принимают без доказательства, их называют аксиомами. Аксиомы выделяются вот так:

Аксиома *n*

Буква *n* обозначает порядковый номер аксиомы в учебнике.

Когда мы даём изучаемому в учебнике понятию точное определение, мы выделяем его вот так:

Определение *n*

Буква *n* обозначает порядковый номер определения в учебнике. Определения, которые должен знать каждый учащийся, выделены в указателе определений жирным шрифтом.

В тех случаях, когда мы формулируем и доказываем теорему, она выделяется вот так:

Теорема *n*

Буква *n* обозначает порядковый номер теоремы в учебнике.

Каждое доказательство теоремы мы начинаем словом «Доказательство». Все шаги доказательства нумеруются и для каждого шага указывается, на какие из предыдущих шагов он опирается (или на какие из изученных ранее аксиом, теорем, определений, свойств). В конце доказательства ставится знак ■, который означает, что доказательство проведено полностью. Обязательные для изучения теоремы в указателе теорем выделены жирным шрифтом.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных геометрических задач, но и приобретёте важнейшее умение – учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.

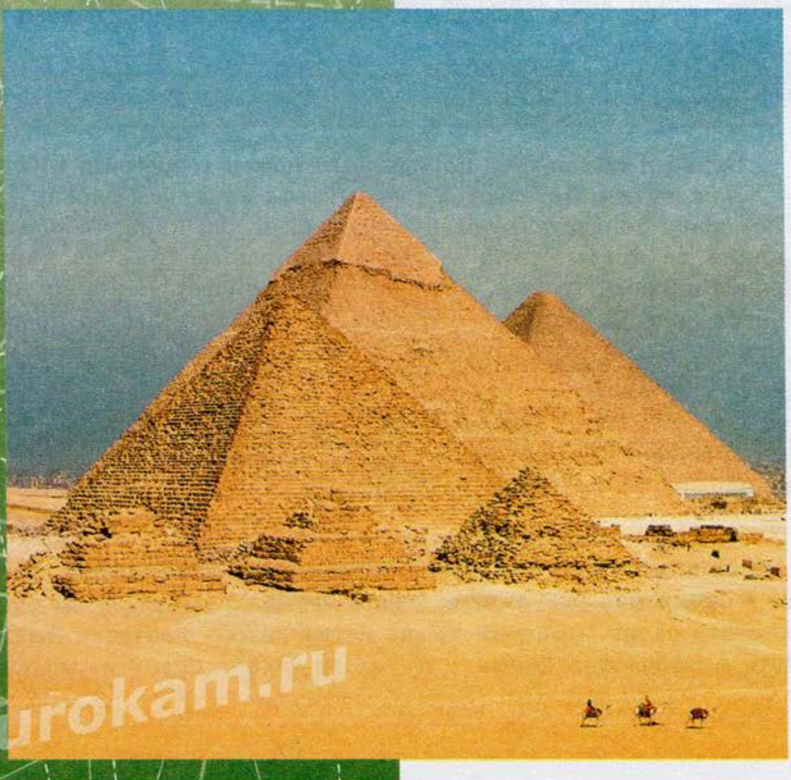
РАЗДЕЛ 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Подобные представления об этих вещах весьма полезны, поскольку ничто не является для нас более наглядным, чем фигура, ибо её можно осязать и видеть.

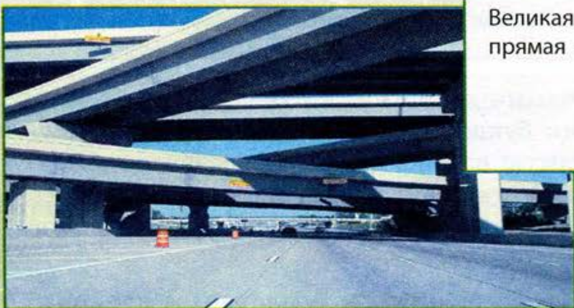
Рене Декарт

(французский философ и математик, 1596–1650)



Глава 1

ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ



Великая, божественная, точная, мудрая
прямая – мудрейшая из линий.

Евгений Иванович Замятин
(русский писатель, 1884–1937)

Открываем новые знания

§ 1.1 ПОНЯТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ

В курсе геометрии мы будем изучать свойства различных геометрических фигур, которые в геометрии принято определять, то есть раскрывать смысл определяемого понятия.

Тем не менее начнём с рассмотрения фигур, которые в геометрии не определяются, их называют *основными*. К ним относятся *точка, прямая, плоскость, пространство*. Основным неопределяемым понятием является также *расстояние* от одной точки до другой.

Все геометрические фигуры состоят из *точек*. Точки обозначаются прописными (заглавными) латинскими буквами: A, B, C, D, K, M и т.д.

Пусть нам даны две точки A и B (рис. 1.1а). Проведём через точки A и B прямую (рис. 1.1б). У нас появляется ещё одно важное понятие гео-

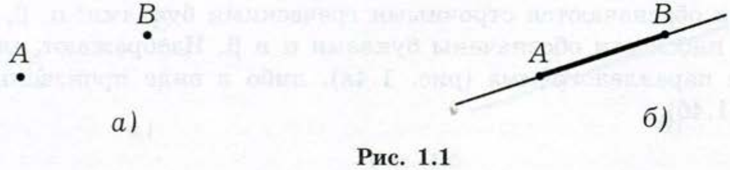


Рис. 1.1

метрии — *прямая*, которая также состоит из точек. Изобразить прямую целиком невозможно, мы лишь условно изображаем её часть.

Некоторые начальные утверждения в геометрии принимают без доказательства. Их называют *аксиомами*. Слово «аксиома» означает истину, принятую в рассматриваемой теории без доказательства.

Первой такой аксиомой является *аксиома прямой*.

Аксиома 1. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d, m, n, p и т.д. или двумя заглавными буквами, соответствующими точкам, лежащим на ней. Например, прямую на рис. 1.1б мы обозначаем AB.

Точки, прямые, плоскости, а также все остальные геометрические фигуры находятся в *пространстве*. На рис. 1.2 изображены различные фигуры, расположенные в пространстве.

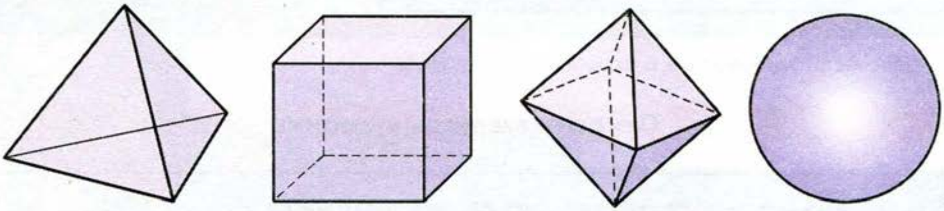


Рис. 1.2

Часто фигуры располагаются на плоскости (рис. 1.3), их называют *плоскими*.

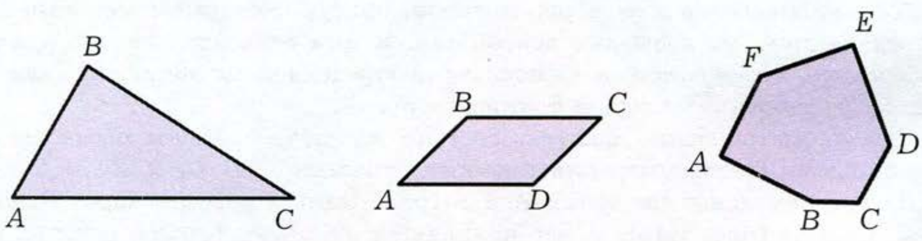
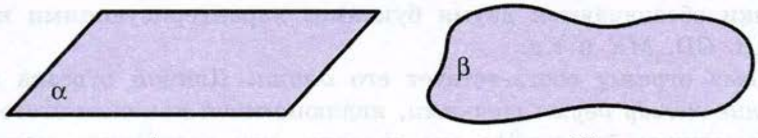


Рис. 1.3

Плоскости обозначаются строчными греческими буквами: α, β, γ и т.д. На рис. 1.4 плоскости обозначены буквами α и β. Изображают плоскости либо в виде параллелограмма (рис. 1.4а), либо в виде произвольной области (рис. 1.4б).



а) б)

Рис. 1.4

С понятием плоскости связаны ещё две аксиомы — *аксиома плоскости* и *аксиома прямой и плоскости*.

Аксиома 2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.

Аксиома 3. Прямая, проходящая через две точки плоскости, лежит в этой плоскости.

Ясно, что если прямая и плоскость имеют более двух общих точек, то прямая тем более лежит в этой плоскости.

Дадим очень важное определение *геометрической фигуры*.

Определение 1. Любое множество точек называется геометрической фигурой.

На всех рисунках в этом разделе изображены геометрические фигуры.

! Часть любой геометрической фигуры также является геометрической фигурой.

§ 1.2 ОТРЕЗКИ И ИХ ДЛИНЫ

Пусть нам даны две точки A и B (рис. 1.5а).

Согласно аксиоме прямой (А.1), через две любые точки можно провести единственную прямую. На рис. 1.5б через точки A и B проходит прямая AB. На этой прямой жирно выделена её часть, ограниченная двумя точками A и B. Такая часть прямой называется *отрезком*. Точки A и B, ограничивающие отрезок, называются его *концами*. На рис. 1.5б изображён отрезок с концами в точках A и B.

а) б)

Рис. 1.5

Отрезки обозначаются двумя буквами, характеризующими концы отрезка: AB, CD, MK и т.д.

Каждому отрезку соответствует его *длина*. Длиной отрезка называют *расстояние между двумя точками*, являющимися концами этого отрезка.

В предыдущем параграфе мы сказали, что расстояние между двумя точками является неопределяемым понятием курса геометрии. Расстояние между точками A и B мы будем обозначать AB. Запись «$AB = 10$ см» читается так: расстояние между точками A и B равно 10 см.

Сформулируем ещё одну аксиому геометрии — *аксиому расстояния.*

Аксиома 4. Для любых двух точек A и B пространства однозначно определено некоторое неотрицательное число AB, называемое расстоянием между ними и обладающее следующими свойствами:

1) $AB = BA$;
2) $AB = 0$ тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают;
3) $AC \leq AB + BC$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда точка B лежит на отрезке AC.

Вы уже знакомы со свойствами различных *чисел*: *натуральных*, *целых*, *рациональных, действительных*. Вам встречались также и различные *величины*: *площади*, *объёмы*, *скорости*, *промежутки времени*, *массы* и т.д. Длины отрезков и расстояния между двумя точками являются величинами, а число, о котором говорится в аксиоме 4, — это числовое значение такой величины.

Процесс нахождения длин отрезков называется *измерением отрезков*. Измерить отрезок — значит сравнить его длину с длиной некоторого отрезка, принятого за *единицу измерения*.

Стандартной международной единицей измерения длин выбран *метр*. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Если за единицу измерения принят метр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается метр. Так, если в отрезке AB метр укладывается 5 раз, то говорят, что длина отрезка равна 5 метрам, или кратко 5 м.

Может оказаться, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части (обычно на 10 равных частей) и определяют, сколько раз эта новая часть укладывается в остатке и т.д. Этот процесс может завершиться на некотором шаге, тогда длина отрезка выражается целым числом или конечной десятичной дробью. Но этот процесс может и не завершиться ни на каком шаге, тогда длина отрезка выражается бесконечной десятичной дробью. В любом случае длина отрезка выражается положительным действительным числом.

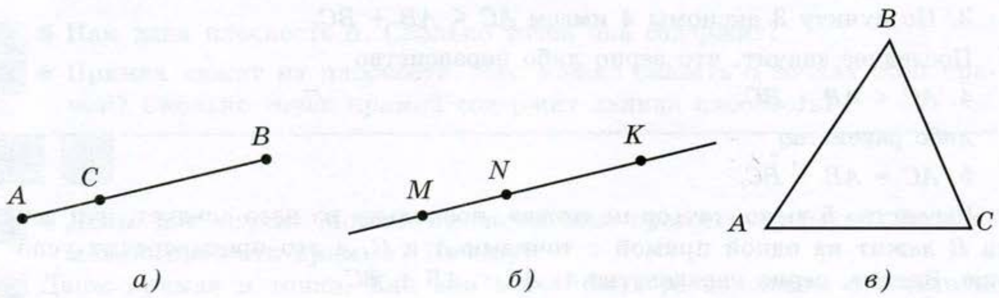


Рис. 1.6

1 метр содержит 100 сантиметров, 1 сантиметр — 10 миллиметров.

На рис. 1.6а отрезок AB точкой C разбит на две части — два отрезка AC и CB. На основании аксиомы расстояния длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и CB: $AB = AC + CB$.

Отметив на прямой три различные точки, вы увидите, что одна из них лежит между двумя другими. Например, на рис. 1.6б точка N лежит между точками M и K. Среди геометрических понятий, выбранных за основные, нет понятия «лежать между». Его можно определить, пользуясь понятиями «расстояние» и «точка». Из рис. 1.6б видно, что расстояние MK равно сумме расстояний MN и NK. Это выполняется всегда, если точка N лежит между точками M и K.

Дадим следующее определение.

Определение 2. Точка X лежит между точками A и B, если эти точки различны и $AX + XB = AB$.

Рассматривая рис. 1.6б и 1.6в, естественно предположить, что:

1) если три различные точки лежат на одной прямой, то одна из них лежит между двумя другими (рис. 1.6б);

2) если три точки не лежат на одной прямой, то ни одна из них не может лежать между двумя другими.

Это можно сформулировать короче: три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда одна из них лежит между двумя другими.

С помощью этого утверждения мы докажем ещё одно свойство расстояния, называемое *неравенством треугольника*.

! Для любых трёх точек, не лежащих на одной прямой, расстояние AC меньше суммы расстояний AB и BC.

1. Точки A, B, C не лежат на одной прямой (дано).
2. $AC < AB + BC$ (требуется доказать).

3. По пункту 3 аксиомы 4 имеем $AC \leqslant AB + BC$.

Последнее значит, что верно либо неравенство

4. $AC < AB + BC$,

либо равенство

5. $AC = AB + BC$.

Равенство 5 выполняться не может, поскольку из него следует, что точка B лежит на одной прямой с точками A и C, а это противоречит условию. Значит, верно неравенство 4: $AC < AB + BC$.

Нам в дальнейшем часто придётся рассматривать *равенство отрезков*.

Определение 3. Отрезки равны, если равны их длины.

Таким образом, все отрезки одинаковой длины равны.

Существует общий подход к определению равенства любых фигур: *наложение одной фигуры на другую*. Согласно этому подходу отрезки равны, если их можно совместить наложением друг на друга.

Итак, у нас есть два определения равенства отрезков.

Можно доказать, что эти определения *равносильны*. Это значит, что если у отрезков равны длины, то эти отрезки можно совместить наложением друг на друга, и наоборот, если два отрезка можно совместить наложением друг на друга, то длины этих отрезков равны.

Развиваем умения

К § 1.1

Н ⇓

1 Пусть нам дана прямая. Сколько точек содержит эта прямая?

2 Посмотрите на рис. 1.7 и ответьте на следующие вопросы:

а) Через какие из отмеченных точек проходят прямые a, b и c?

б) Какие из отмеченных точек лежат на прямой b?

в) Какие из отмеченных точек не лежат на прямой c?

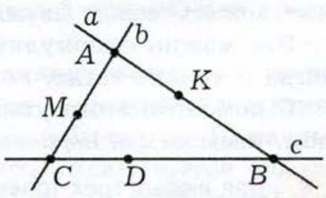


Рис. 1.7

3 ● Нам дана плоскость α. Сколько точек она содержит?

4 ● Прямая лежит на плоскости. Что можно сказать о точках этой прямой? Сколько точек прямой содержит данная плоскость?

Н ⇑

5 ● Даны две точки. Можно ли через них провести прямую? Сколько можно провести прямых? Почему?

6 Даны прямая и точка. Как они могут быть расположены относительно друг друга? Как могут быть расположены относительно друг друга прямая и две точки?

7 Через любые ли три точки можно провести плоскость? Обязательно ли эта плоскость единственная?

8 Почему у штативов фотоаппаратов, геодезических приборов по три опорные ножки? Почему стол, имеющий четыре ножки, не всегда устойчив?

9 Что нужно знать о прямой a, чтобы утверждать, что она лежит в плоскости α?

10 Дана прямая l. Сколько плоскостей в пространстве содержат эту прямую l?

Н

11 Есть одна точка. Проведите через эту точку прямую. Сколько можно провести прямых через данную точку?

12 Есть три точки. Как они могут быть расположены? Сколько через них можно провести прямых? Почему?

13 Перечертите рис. 1.8 в тетрадь. С помощью линейки проведите все прямые, проходящие через пары этих точек. Сколько прямых вам удалось провести?

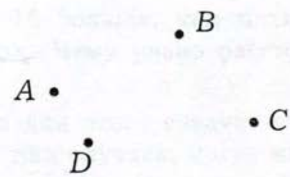


Рис. 1.8

П

14 Могут ли 6 прямых пересекаться в 8 точках?

15 На прямой дано 10 точек. На сколько непересекающихся частей эти точки делят прямую?

16 Вы познакомились с понятием плоскости. Мы пока мало что знаем о геометрии, о её методах, о свойствах геометрических фигур, но уже можем начать проводить первые математические исследования: наблюдать, делать выводы, рассматривать различные случаи. Вот первое задание: На сколько частей могут разбивать пространство две плоскости? три плоскости?

К § 1.2

17 Даны прямая a и на ней три точки (рис. 1.9).

а) Сколько отрезков получилось на прямой?

б) Назовите концы получившихся отрезков.

в) Какими свойствами обладают получившиеся отрезки?

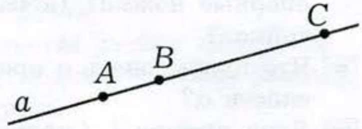


Рис. 1.9

18 На рис. 1.10 изображены две фигуры. Сколько отрезков вы видите на рис. 1.10а, 1.10б? (Имеются в виду отрезки, соединяющие выделенные точки.)

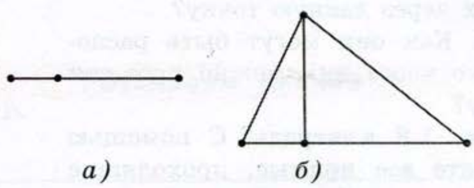


Рис. 1.10

19 Даны два отрезка. Как они могут быть расположены относительно друг друга? Сколько у них может быть общих точек?

20 Даны отрезок и прямая. Каково может быть их взаимное расположение?

21 Даны отрезок и плоскость. Каково может быть их взаимное расположение?

Н

22 Расстояние между двумя точками, измеренное в сантиметрах, равно 12. Чему будет равно это расстояние, если за единицу измерения длины принять миллиметр?

23 В каждом из следующих равенств вставьте пропущенные числа:

а) 2 м = ... см = ... мм;

б) ... м = ... см = 1 мм;

в) ... м = 50 см = ... мм.

24 Точка B лежит на прямой между точками A и C. $AB = 2$, $AC = 5$. Найдите расстояние BC.

25 Даны две (три) различные точки. Сколько отрезков с концами в этих точках может получиться? Изобразите все возможные случаи.

26 На рис. 1.11 изображены 3, 4 и 5 точек. Соедините эти точки отрезками. Сколько отрезков вы получили?

а) *б)* *в)*

Рис. 1.11

П

27 Расстояние AB, измеренное в сантиметрах, на 15 больше, чем пятикратное расстояние AB, измеренное в дециметрах. Чему равно расстояние AB в дециметрах?

28 На прямой нужно получить 3 отрезка. Сколько для этого следует отметить точек на данной прямой? Решите задачу для случаев, когда мы хотим получить 4, 5, 6 отрезков.

М

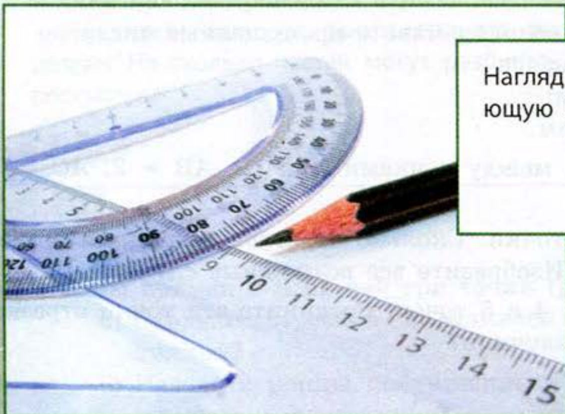
29 а) На прямой дано 5 точек. Сколько при этом имеется отрезков с концами в этих точках?

б) На прямой дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках? Ответьте на этот вопрос сначала для $n = 6$; 7; 8, а затем для произвольного n.

30 Расставьте на плоскости 6 точек таким образом, что если соединить первую точку со второй, вторую с третьей и т.д., а шестую вновь с первой, то каждый из шести отрезков ровно один раз пересекается с каким-либо другим отрезком.

Глава 2

УГЛЫ



> Наглядное понимание играет первенствующую роль в геометрии.
>
> *Давид Гильберт*
> *(немецкий математик, 1862–1943)*

Открываем новые знания

§ 2.1 УГЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

На рис. 2.1 изображена прямая a, на ней отмечена точка B.

Часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих на данной прямой по одну сторону от данной точки, называется *лучом.* Таким образом, точка B определила на прямой a два луча. Точка B называется *началом каждого из этих лучей.*

Лучи обозначаются латинскими строчными буквами — a, b, m, n и т.д. На рис. 2.2а луч обозначен буквой l. Луч можно обозначать и двумя заглавными буквами, одна из которых, записываемая первой, обозначает начало луча, а вторая — какую-либо точку на луче (например, луч BC на рис. 2.2б).

Рассмотрим важный случай расположения двух лучей — два луча имеют общее начало.

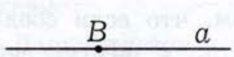


Рис. 2.1

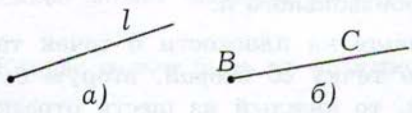


Рис. 2.2

Два луча с общим началом, дополняющие друг друга до прямой, называются *дополнительными*. На рис. 2.3 лучи BA и BC — дополнительные.

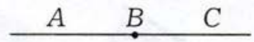


Рис. 2.3

На рис. 2.4 лучи OA и OC имеют общее начало — точку O и разбивают плоскость на две части, они выделены цветом.

Определение 4. Углом называется фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости.

Точка, из которой выходят ограничивающие угол лучи, называется *вершиной угла*, а сами лучи — *сторонами угла* (рис. 2.4).

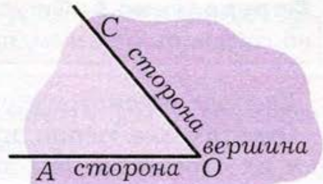


Рис. 2.4

Слово «угол» иногда заменяют знаком «$\angle$». При изображении угла чертят только выходящие из вершины начальные участки его сторон, а ту часть плоскости, которую хотят указать, обозначают дужкой (рис. 2.5).

Углы можно обозначать и с помощью букв. Угол обозначается одной заглавной буквой, поставленной у вершины угла, например $\angle O$, или тремя буквами, из которых одна (в обозначении угла она записывается на втором месте) ставится при вершине угла, а две другие — у каких-нибудь точек сторон, например $\angle AOB$ (рис. 2.5).

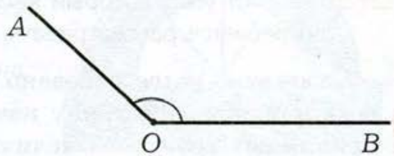


Рис. 2.5

Определение 5. Развёрнутым углом называется угол, сторонами которого являются дополнительные лучи одной прямой.

Развёрнутый угол AOB изображён на рис. 2.6.

Мы уже говорили о том, что два луча с общим началом задают два угла, например, как на рис. 2.4. Возникает вопрос:

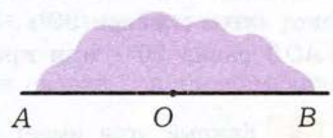


Рис. 2.6

? Всегда ли следует рассматривать два образовавшихся угла или можно научиться выделять тот, который нам нужен?

Посмотрим на рис. 2.7, на котором цветом выделены два угла. Чем они отличаются друг от друга?

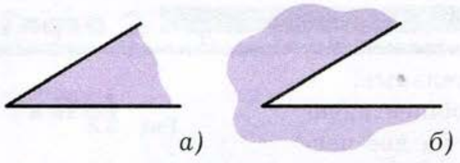


Рис. 2.7

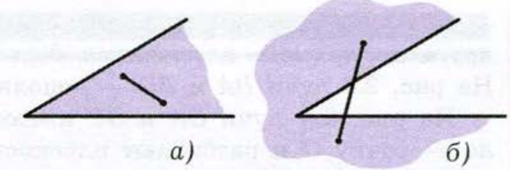


Рис. 2.8

В геометрии есть такие понятия, как *выпуклые* и *невыпуклые фигуры*. Эти понятия помогут нам выделить нужный для рассмотрения угол.

Определение 6. Фигура называется выпуклой, если любые две её точки можно соединить отрезком, принадлежащим этой фигуре.

Ещё раз рассмотрим углы, изображённые на рис. 2.7.

Отметим две точки, принадлежащие углам (рис. 2.8а и 2.8б), и соединим их отрезками. Мы видим, что на рис. 2.8а все точки отрезка принадлежат углу, а на рис. 2.8б не все. На рис. 2.8а изображён выпуклый угол, на рис. 2.8б — невыпуклый.

! Договоримся, что, если в учебнике написано «угол», значит, мы рассматриваем тот угол, который является выпуклым. Если же в какой-нибудь ситуации потребуется рассматривать невыпуклый угол, то об этом будет сказано особо.

Измерение углов основано на сравнении углов с углом, величина которого принята за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают *градус* — величину угла, равного 1/180 части развёрнутого угла. Градус обозначается знаком «°».

Величина угла, равного 1/60 части градуса, называется *минутой* и обозначается знаком «′», 1/60 часть минуты называется *секундой* и обозначается знаком «″». Например, угол в 60 градусов 32 минуты и 17 секунд записывается так: $60°32'17''$.

В результате измерения угла находят *величину угла*. Величина угла обозначается или так же, как сам угол, или буквой греческого алфавита. Запись $\alpha = 90°$ читается так: «величина угла α равна 90°» или кратко: «угол α равен 90°». Запись $\angle AOB = 20°$ читается так: «величина угла AOB равна 20°» или кратко: «угол AOB равен 20°».

! Каждый угол имеет определённую величину, бóльшую нуля. Развёрнутый угол равен 180°. Величина угла равна сумме величин углов, на которые он разбивается любым лучом, выходящим из вершины угла и лежащим внутри этого угла.

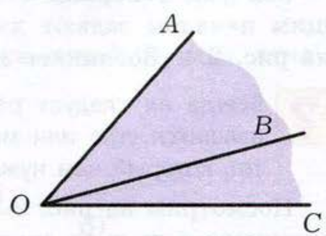


Рис. 2.9

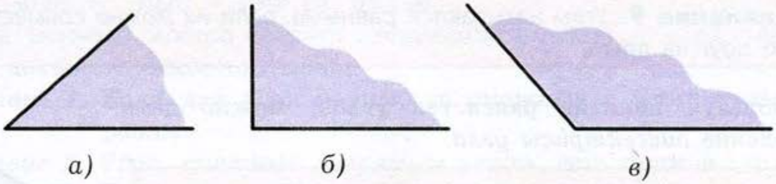


Рис. 2.10

Например, на рис. 2.9 луч OB проходит между сторонами угла AOC, угол AOC равен сумме углов AOB и BOC: $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.

В зависимости от величины угла различают углы трёх видов: *острые*, *прямые* и *тупые* (рис. 2.10).

Определение 7. Угол, равный 90°, называется прямым углом. Угол, меньший 90°, называется острым углом. Угол, больший 90°, называется тупым углом.

Для измерения величин углов на уроках геометрии применяется инструмент, который называется *транспортир*. На рис. 2.11 показано, как с помощью транспортира можно измерять величины углов. С помощью транспортира можно также *отложить угол от данного луча*.

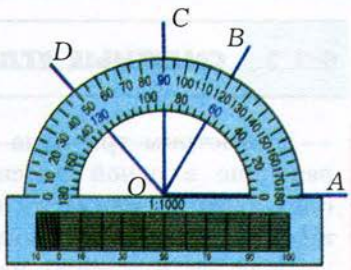


Рис. 2.11

Введём теперь понятие *равенства углов*.

Как и при определении равенства отрезков, рассмотрим два определения равенства углов, которые равносильны между собой. Чаще всего применяется определение равенства углов через их величины.

Определение 8. Углы равны, если равны их величины.

На рис. 2.12 изображены два угла ABC и DEM, величины которых равны, а значит, по определению 8, эти углы равны. Равенство углов обозначается так: $\angle ABC = \angle DEM$.

Ещё один подход к понятию равенства углов связан с понятием *наложения одной фигуры на другую*.

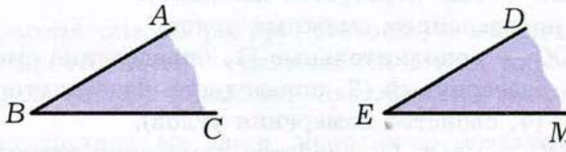


Рис. 2.12

Определение 9. Углы называются равными, если их можно совместить наложением друг на друга.

Используя понятие равенства углов, можно дать определение *биссектрисы угла*.

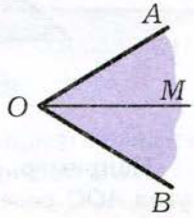


Рис. 2.13

Определение 10. Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла и делит угол пополам.

На рис. 2.13 луч OM — биссектриса угла AOB, при этом $\angle AOM = \angle BOM$.

Нам часто придётся откладывать угол, равный данному.

! От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол, равный данному.

§ 2.2 СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

Рассмотрим три луча с общим началом O, лежащие в одной плоскости: OA, OB и OC (рис. 2.14). Лучи OA и OC — дополнительные, луч OB лежит между ними.

Углы AOB и BOC называются *смежными углами*.

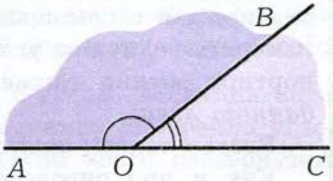


Рис. 2.14

Определение 11. Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными лучами.

Глядя на рис. 2.14, можно предположить, что сумма смежных углов равна 180°.

Теорема 1. Сумма смежных углов равна 180°.

Доказательство

1. $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные (дано) (рис. 2.14).
2. $\angle AOB + \angle BOC = 180°$ (требуется доказать).

Воспользуемся определением смежных углов.

3. Лучи OA и OC — дополнительные (1, определение смежных углов).
4. Угол AOC — развёрнутый (3, определение развёрнутого угла).
5. $\angle AOC = 180°$ (4, свойство измерения углов).
6. $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ (1, свойство измерения углов).

7(2)[1]. $\angle AOB + \angle BOC = 180°$ (5, 6). ■

Из этой теоремы можно сделать следующие выводы — *следствия*, которые вы докажете самостоятельно:

Следствие 1. Если два угла равны, то смежные с ними углы тоже равны.

Следствие 2. Угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.

Следствие 3. Угол, смежный с острым углом, — тупой; угол, смежный с тупым углом, — острый.

Во всех рассмотренных выше случаях мы имели дело со смежными углами на плоскости, однако смежные углы используются и при изучении фигур в пространстве.

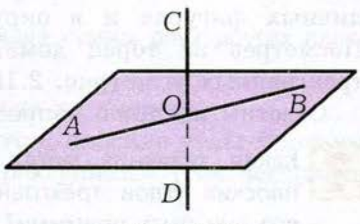


Рис. 2.15

На рис. 2.15 прямая *CD* пересекает плоскость α в точке *O*, прямая *AB* лежит в плоскости α и тоже проходит через точку *O*. Укажите смежные углы на рис. 2.15.

§ 2.3 ЧТО ТАКОЕ ТРЁХГРАННЫЙ УГОЛ

Рассмотрим три луча *a*, *b* и *c* с общим началом — точкой *O* (рис. 2.16а).

Три данных луча не обязательно лежат в одной плоскости. На рис. 2.16б лучи *b* и *c* лежат в плоскости *p*, а луч *a* не лежит в этой плоскости.

Лучи *a*, *b* и *c* попарно задают три выделенных дугами угла α, β и γ (рис. 2.16в).

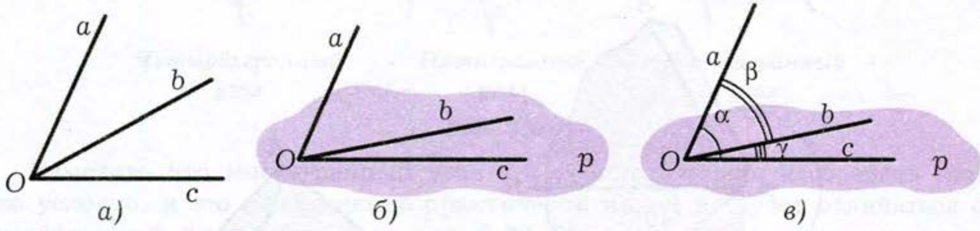


Рис. 2.16

Мы будем рассматривать фигуру, состоящую из трёх указанных выше углов и части пространства, ограниченной этими плоскими углами. Эту пространственную фигуру называют *трёхгранным углом* (рис. 2.17).

[1] В учебнике нумеруются все шаги проводимого доказательства. Запись 7(2) означает, что это седьмой шаг доказательства, который доказывает п. 2.

Лучи a, b и c называются *рёбрами трёхгранного угла*, а углы $\angle AOC$, $\angle AOB$, $\angle BOC$, ограничивающие трёхгранный угол, — его *гранями*. Эти углы-грани образуют *поверхность трёхгранного угла*. Точка O называется *вершиной трёхгранного угла*. Трёхгранный угол можно обозначить так: $OABC$.

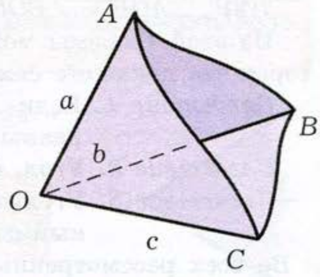


Рис. 2.17

Трёхгранные углы часто встречаются в различных фигурах и в окружающем нас мире. Посмотрев на торец дома, мы видим четыре трёхгранных угла (рис. 2.18).

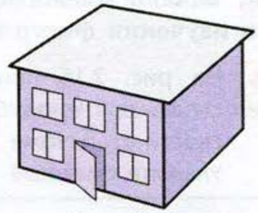


Рис. 2.18

Ответим на такой вопрос:

? Какие значения могут принимать величины плоских углов трёхгранного угла? Могут ли все они быть прямыми? острыми? тупыми?

Выполним следующее задание.

Задание

Возьмите лист бумаги, отметьте на нём точку P и проведите четыре луча так, что $\angle APB = 60°$, $\angle CPB = 40°$, $\angle CPA_1 = 50°$ (рис. 2.19а). Мы получили *развёртку поверхности трёхгранного угла*. Возьмите ножницы и вырежьте $\angle APA_1$ (на рисунке предусмотрена дополнительная полоска для склеивания).

Согнём полученную развёртку по лучам PB и PC и склеим с помощью полоски углы APB и CPA_1. Мы получим *модель поверхности трёхгранного угла* (рис. 2.19б).

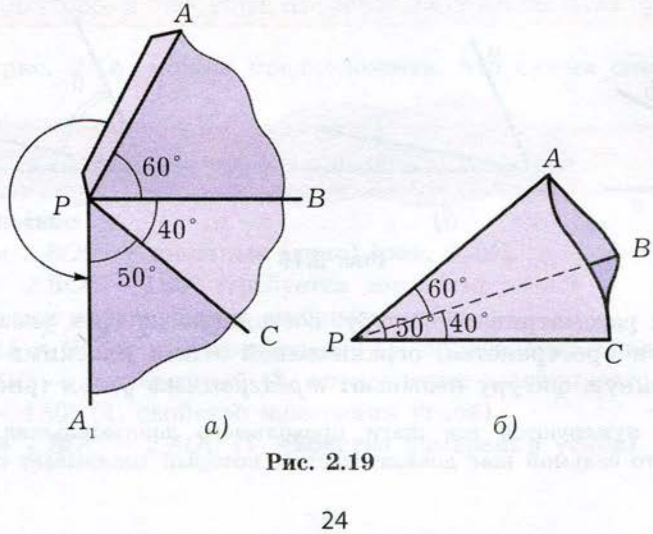


Рис. 2.19

Ответьте на следующие вопросы:

1. Как соотносятся самый большой плоский угол и сумма других плоских углов?
2. Можно ли получить указанным способом трёхгранный угол, если $\angle APB = 120°$, $\angle BPC = 30°$, $\angle CPA_1 = 80°$?

Размышляя над поставленными вопросами, вы придёте к формулировке основного свойства плоских углов трёхгранного угла:

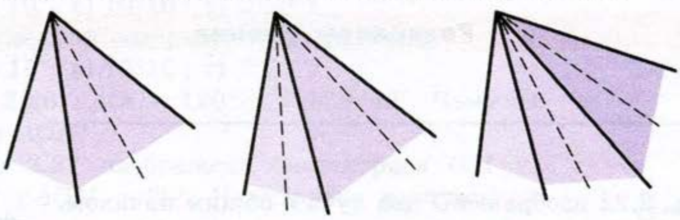
В трёхгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

Это теорема геометрии, но доказать её мы пока не сможем.

Можно попытаться построить трёхгранный угол, плоские углы которого заданы в вопросе 2. Вы убедитесь, что такой трёхгранный угол построить невозможно.

§ 2.4 МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Конструируя трёхгранный угол, мы взяли три луча с общим началом. Конечно, лучей можно взять больше — 4, 5, 6, ..., *n*. Повторяя всё то, что мы делали с тремя лучами, мы можем получить так называемые *многогранные углы*, некоторые из них показаны на рис. 2.20.



Четырёхгранный угол *Пятигранный угол* *Шестигранный угол*

Рис. 2.20

Заметим, что многогранный угол с *n* гранями можно изобразить только условно, и это изображение практически ничем не будет отличаться от изображений, приведённых на рис. 2.20. При изучении свойств многогранных углов с *n* гранями важны рассуждения, а не чертёж.

Изучив внимательно все многогранные углы на рис. 2.20, мы можем заключить, что у каждого из многогранных углов одинаковое число рёбер и граней:

- у четырёхгранного угла — 4 ребра, 4 грани и одна вершина;
- у пятигранного угла — 5 рёбер, 5 граней и одна вершина;
- у шестигранного угла — 6 рёбер, 6 граней и одна вершина и т.д.

Многогранные углы бывают *выпуклыми* и *невыпуклыми*.

Представьте себе, что мы взяли четыре луча с общим началом, как на рис. 2.21. В этом случае мы получили *невыпуклый многогранный угол*.

Опираясь на приведённые изображения многогранных углов, можно сформулировать определение выпуклого многогранного угла.

Определение 12. Многогранный угол называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой плоскости, содержащей его грань.

Другими словами, выпуклый многогранный угол всегда можно положить любой его гранью на некоторую плоскость. Вы видите, что в случае, изображённом на рис. 2.21, для некоторых граней так поступить не удастся.

Мы уже давали определение выпуклым фигурам, причём другим способом. В дальнейшем мы сумеем доказать, что эти определения равносильны.

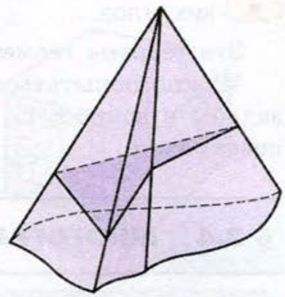


Рис. 2.21

! Отметим, что если в дальнейшем мы говорим «многогранный угол», то мы имеем в виду, что он выпуклый. Если рассматриваемый многогранный угол невыпуклый, об этом будет сказано специально.

Развиваем умения

К § 2.1

Н ⇓

1 ● На рис. 2.22 изображены два луча с общим началом. Какие фигуры на плоскости вы видите?

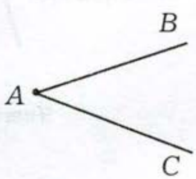


Рис. 2.22

2 ● Сколько углов, равных 60°, можно отложить от данного луча?

3 ● На рис. 2.23 изображены три угла. Какой из них острый? тупой? прямой?

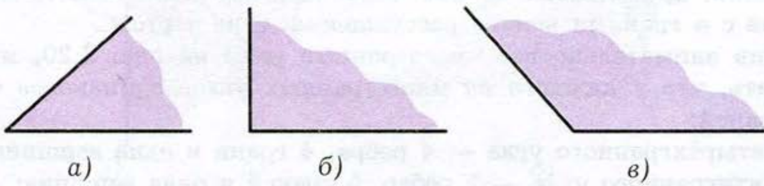


Рис. 2.23

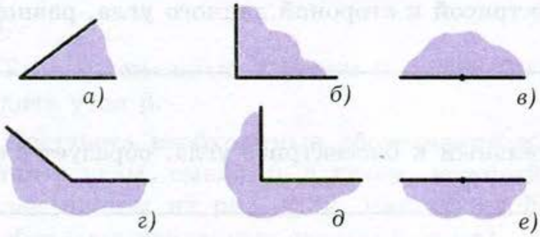


Рис. 2.24

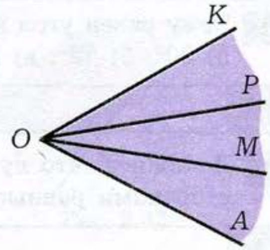


Рис. 2.25

4 • Как надо расположить два луча, чтобы образовался угол? Сколько при этом образуется углов? Сколько из них выпуклых?

5 • На рис. 2.24 изображены различные углы. Какие из этих углов развёрнутые? Какие из них меньше развёрнутых? Какие углы больше развёрнутых?

Н **⇑**

6 • На рис. 2.25 OP — биссектриса угла KOM, а OM — биссектриса угла POA. Будет ли угол KOP равен углу AOM? Объясните свой ответ.

Н

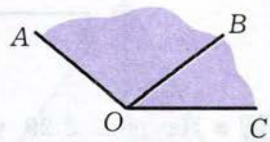


Рис. 2.26

7 Сколько минут содержит угол, равный:
а) $4°$; б) $10°$; в) $10°10'$; г) $2°20''$?

8 Сколько секунд содержит угол, равный:
а) $1°$; б) $10°$; в) $10°10'$; г) $2°20''$?

9 На рис. 2.26 $\angle AOC = 120°$, $\angle BOC = 40°$. Чему равен угол AOB?

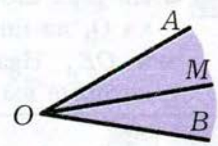


Рис. 2.27

10 На рис. 2.27 изображена биссектриса OM угла AOB. $\angle AOM = 20°$. Чему равна величина угла AOB?

11 На рис. 2.28 изображены два луча OA и OC с общим началом. Заштрихуйте угол AOC.

12 Нарисуйте: а) два угла с общей вершиной; б) два угла с общей стороной; в) два угла, стороны которых лежат на двух данных прямых; г) два угла так, чтобы стороны одного пересекали стороны другого; д) углы ABC и ABD; е) углы ABC и BCM; ж) углы KMO, OMD и DMK.

13 С помощью транспортира отложите углы величиной $35°$ и $45°$ от данного луча.

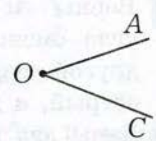


Рис. 2.28

14 Выполните действия над величинами углов:
а) $25°36'24'' + 36°24'40''$; б) $48°26' + 28°36'34''$;
в) $48°48'48'' - 24°36'36''$; г) $3 \cdot 84°36'$;
д) $5 \cdot 18°36'18''$; е) $144°5'21'' : 3$.

15 Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного: а) 30°; б) 52°; в) 172°?

П

16 Докажите, что луч, дополнительный к биссектрисе угла, образует с его сторонами равные углы.

М

17 Нарисуйте угол с вершиной *A*. Из точки *A* внутри угла проведите: а) два луча; б) три луча. Сколько углов вы теперь видите на каждом рисунке? (Речь идёт только о выпуклых углах.)

К § 2.2

Н ⇓

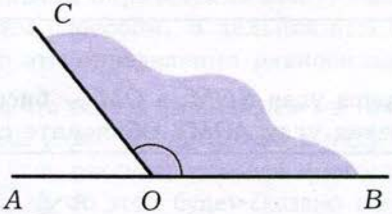


Рис. 2.29

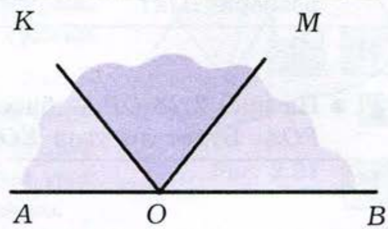


Рис. 2.30

18 ● На рис. 2.29 угол *COB* выделен цветом. Назовите угол, смежный с этим углом.

19 ● На рис. 2.30 на прямой *AB* отмечена точка *O*, из которой проведены два луча *OM* и *OK*. Назовите пары смежных углов, которые вы видите на этом рисунке.

Н ⇑

20 Можно ли углы *ABC* и *CBD* (рис. 2.31) назвать смежными?

21 О двух углах известно, что сумма их равна 180°. Можно ли утверждать, что эти углы смежные?

22 Верны ли такие утверждения: а) если два угла смежные, то один из них острый, а другой тупой; б) если один из двух углов острый, а другой тупой, то они смежные?

23 Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

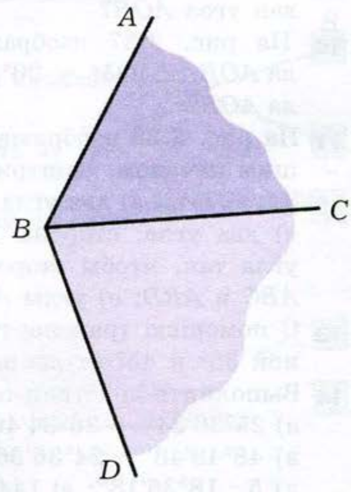


Рис. 2.31

Н

24 Угол α, смежный с углом β, равен $30°$. Найдите угол β.

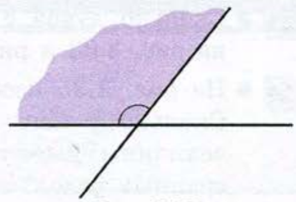


Рис. 2.32

25 Поставьте необходимые обозначения и выпишите углы, смежные с углом, который выделен цветом на рис. 2.32. Какими свойствами обладают найденные смежные углы?

26 Нарисуйте луч. Нарисуйте ещё два луча так, чтобы вместе с данным они образовали смежные углы.

27 Найдите углы, смежные с углами $30°$, $45°$, $90°$, $15°30'$, $82°2'$.

28 Найдите смежные углы, если: а) один из них на $45°$ больше другого; б) их разность равна $50°$; в) один в 5 раз меньше другого; г) они равны; д) их величины относятся как 2:3.

29 Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме $100°$?

30 Докажите, что если смежные углы равны, то они прямые.

П

31 Являются ли два угла смежными, если:
а) их объединением является полуплоскость;
б) их пересечением является луч;
в) их объединением является полуплоскость, а пересечением луч?
Сделайте соответствующие рисунки.

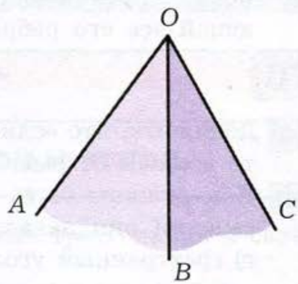


Рис. 2.33

М

32 Найдите величину угла между биссектрисами смежных углов.

К § 2.3–2.4

Н ⇓

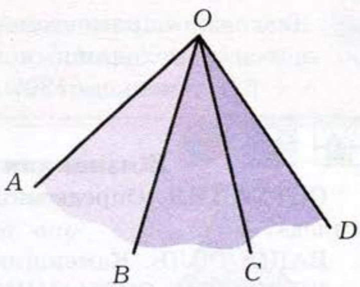


Рис. 2.34

33 ● На рис. 2.33 изображён трёхгранный угол. Назовите вершину этого угла и его рёбра. Сколько рёбер и граней имеет трёхгранный угол?

34 ● На рис. 2.34 изображён четырёхгранный угол $OABCD$. Назовите вершину этого угла, его рёбра и грани. Сколько плоских углов имеет этот угол?

35 Сколько лучей с общим началом вы видите на рис. 2.33 и рис. 2.34?

36 На рис. 2.35 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сколько у него трёхгранных углов? Какие величины имеют плоские углы этих трёхгранных углов?

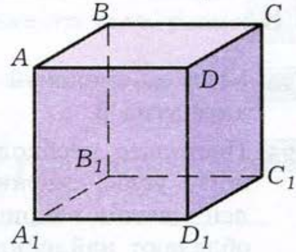


Рис. 2.35

Н ⇑

37 Какие фигуры можно получить при пересечении трёхгранного угла и плоскости?

38 Из плотной бумаги или картона вырежьте углы 50°, 60°, 90°, 120°, 140°, 150°. Попытайтесь изготовить из них модель поверхности трёхгранного угла с тремя плоскими углами. Сформулируйте выводы: в каких случаях из трёх плоских углов нельзя составить поверхность трёхгранного угла?

39 Могут ли все плоские углы трёхгранного угла быть прямыми? Изобразите такой трёхгранный угол. Постройте сечение этого трёхгранного угла плоскостью, не проходящей через его вершину и пересекающей все его рёбра. Какая фигура получится в сечении?

П

40 Докажите, что если сумма плоских углов трёхгранного угла равна 180°, то все они острые.

41 Как должны быть расположены два трёхгранных угла, чтобы в пересечении они давали: а) только одну точку; б) луч; в) плоский угол; г) трёхгранный угол; д) некоторый многогранник?

М

42 Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его рёбрами a, b и c, исходящими из одной точки, углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma$ меньше 180°.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Определение длины диагонали прямоугольного параллелепипеда.

ВАША РОЛЬ. Каменщик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. В вашем распоряжении имеется три одинаковых кирпича и метровая линейка с миллиметровыми делениями.

ЗАДАНИЕ: а) Определите длину диагонали кирпича с точностью до 1 мм.

б) Сможете ли вы выполнить задание, если у вас имеется только два кирпича? только один кирпич?

Глава 3

ТРЕУГОЛЬНИКИ, МНОГОУГОЛЬНИКИ, МНОГОГРАННИКИ

Глядя на мир, нельзя не удивляться.

Козьма Петрович Прутков
(коллективный псевдоним, под которым в 1850–1860-е гг. выступали поэты А.К. Толстой и братья Жемчужниковы)

Открываем новые знания

§ 3.1 ТРЕУГОЛЬНИК. СВОЙСТВА ЕГО СТОРОН И УГЛОВ

В 5–6 классах вы уже довольно подробно изучали треугольник и свойства его элементов.

Вспомним определение треугольника.

Определение 13. Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки, а также части плоскости, ограниченной этими отрезками.

Точки называются *вершинами треугольника*, а отрезки — его *сторонами*. Часть плоскости, ограниченную сторонами треугольника, называют *внутренней областью треугольника*.

Треугольник обозначается его вершинами. На рис. 3.1 изображён треугольник ABC: A, B, C — его вершины, а отрезки AB, BC, AC — его стороны. Вместо слова «треугольник» употребляется символ «$\triangle$». Запись $\triangle PMK$ читается: «треугольник PMK».

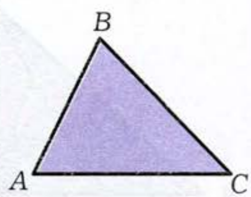


Рис. 3.1

В зависимости от соотношений между длинами сторон треугольника выделяют *равнобедренные* и *равносторонние треугольники*.

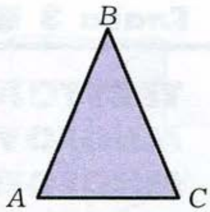


Рис. 3.2

Определение 14. Треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона называется основанием равнобедренного треугольника.

На рис. 3.2 в треугольнике ABC $AB = BC$, значит, по определению 14, треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.

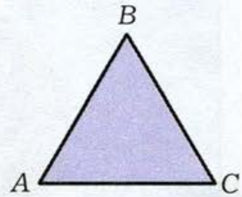


Рис. 3.3

Определение 15. Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним, или правильным.

На рис. 3.3 изображён равносторонний треугольник ABC, все его стороны имеют одинаковую длину: $AB = BC = AC$.

Есть ещё одно понятие, связанное с длинами сторон треугольников, — *периметр треугольника*. Так называют сумму длин его сторон.

Определение 16. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника, называется медианой треугольника.

На рис. 3.4 вершина B треугольника ABC соединена с серединой D стороны AC, а значит, отрезок BD является медианой треугольника ABC.

Перейдём к изучению свойств треугольников, связанных с величинами его углов.

Пусть нам дан треугольник ABC (рис. 3.5а). Рассмотрим вершину A и два луча AB и AC. Эти лучи с общим началом, как известно, задают два угла. Тот из углов, внутри которого лежит сам треугольник ABC, называется *внутренним углом треугольника* (рис. 3.5б).

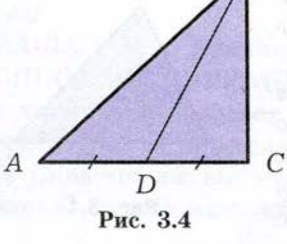


Рис. 3.4

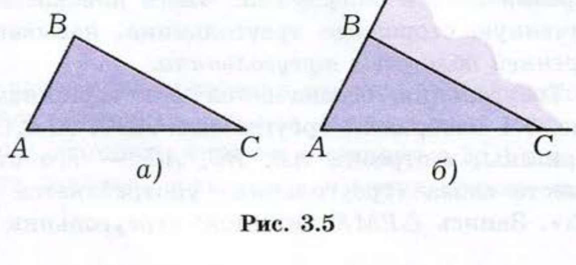


Рис. 3.5

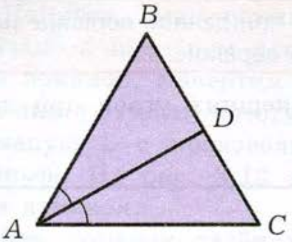


Рис. 3.6

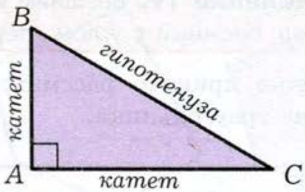


Рис. 3.7

Определение 17. Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне.

На рис. 3.6 отрезок AD является частью биссектрисы угла A треугольника ABC и соединяет вершину A треугольника с точкой D на противолежащей стороне. Значит, он является биссектрисой треугольника ABC.

Определение 18. Треугольник называется прямоугольным, если у него есть прямой угол.

У треугольника ABC (рис. 3.7) угол A прямой, а значит, этот треугольник прямоугольный.

Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называются *катетами*, а сторона, противолежащая прямому углу, — *гипотенузой* (рис. 3.7).

Пусть нам дан треугольник ABC (рис. 3.8а). У него есть три внутренних угла, на рисунке они обозначены дужками.

Продлим две стороны треугольника, как показано на рис. 3.8б. Мы увидим, что у каждого внутреннего угла треугольника есть два смежных с ним угла.

На рис. 3.8б у угла BCA треугольника ABC есть два смежных с ним угла: $\angle BCD$ и $\angle ACK$, их называют *внешними углами треугольника*.

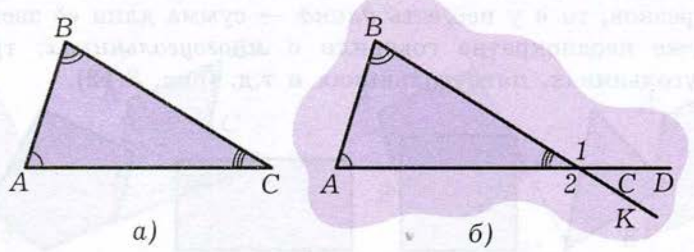


Рис. 3.8

Определение 19. Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.

Обычно принято рассматривать один из внешних углов при данной вершине треугольника.

§ 3.2 МНОГОУГОЛЬНИКИ

На рис. 3.9 изображены несколько точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, которые последовательно соединены отрезками A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5. В результате получилась геометрическая фигура $A_1A_2A_3A_4A_5$, которая называется *ломаной*.

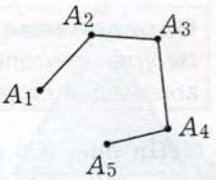


Рис. 3.9

Определение 20. Ломаной называется фигура, которая образована отрезками, такими, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т.д., причём соседние отрезки не лежат на одной прямой.

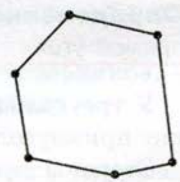


Рис. 3.10

Отрезки, из которых состоит ломаная, называются её *звеньями*. Точки A_1 и A_n называются соответственно *началом* и *концом ломаной*.

Рассмотрим различные ломаные. Если начало и конец ломаной совпадают, то она называется *замкнутой* (рис. 3.10), в противном случае ломаная является *незамкнутой* (рис. 3.9).

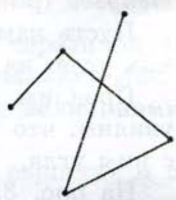


Рис. 3.11

Ломаная иногда может пересекать сама себя, т.е. несоседние по порядку звенья ломаной могут иметь общие точки. В этом случае ломаная называется *самопересекающейся*, или *непростой* (рис. 3.11). Если таких самопересечений нет, то ломаная называется *простой*.

Мы знаем, что у каждого отрезка есть длина, а так как ломаная состоит из отрезков, то и у неё есть *длина* — сумма длин её звеньев.

Мы уже неоднократно говорили о *многоугольниках:* треугольниках, четырёхугольниках, пятиугольниках и т.д. (рис. 3.12).

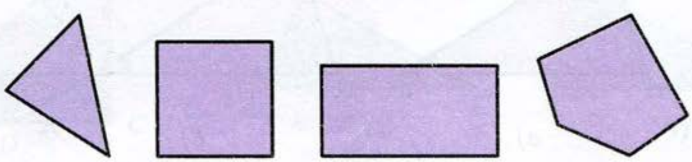


Рис. 3.12

Понятие многоугольника тесно связано с понятием простой замкнутой ломаной. Начертим на плоскости (на листе бумаги) простую замкнутую ломаную L с произвольным числом звеньев. На рис. 3.13 это пятизвенная ломаная.

Эта ломаная разбивает плоскость на две части — внешнюю и внутреннюю (рис. 3.14).

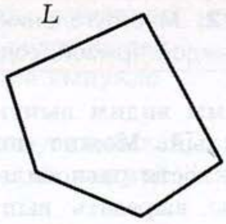


Рис. 3.13

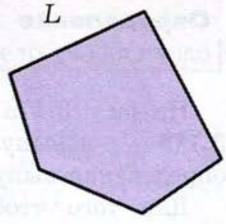


Рис. 3.14

Определение 21. Фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею частью плоскости, называется многоугольником.

Ломаная L (рис. 3.14) называется *границей многоугольника*, а её внутренняя область — *внутренней областью многоугольника*. Звенья называются *сторонами многоугольника*, а вершины — *вершинами многоугольника*. Иногда, говоря о стороне многоугольника, имеют в виду и её длину.

Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называется его *диагональю*. На рис. 3.15 отрезок AD является одной из диагоналей многоугольника $ABCDE$.

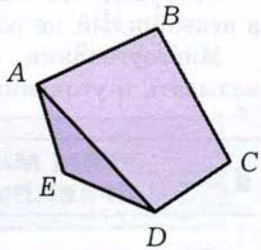


Рис. 3.15

В геометрии различают *выпуклые* и *невыпуклые многоугольники*. На рис. 3.16 изображены два пятиугольника.

? Чем отличаются друг от друга эти многоугольники?

Мы уже давали определение выпуклой фигуры, но сейчас поступим несколько иначе. Проведём прямую a, содержащую сторону BC, в обоих многоугольниках (рис. 3.17). В первом случае (рис. 3.17а) весь многоугольник лежит по одну сторону от этой прямой. Во втором случае (рис. 3.17б) это не так: его части находятся в обеих полуплоскостях, задаваемых прямой a.

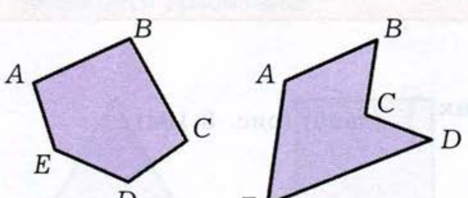


Рис. 3.16

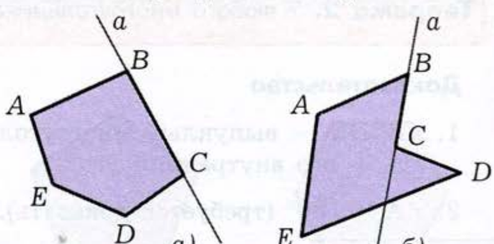


Рис. 3.17

Определение 22. Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

На рис. 3.17а мы видим выпуклый многоугольник $ABCDE$, а на рис. 3.17б — невыпуклый. Можно доказать, что для многоугольника новое определение выпуклости равносильно прежнему.

Для того чтобы вырезать выпуклый многоугольник из бумаги, лист можно разрезать от края до края: вдоль прямых, содержащих стороны многоугольника.

! Если в тексте написано «многоугольник», договоримся считать, что он выпуклый. В случае рассмотрения невыпуклого многоугольника об этом будет специально сказано.

Отметим, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали, а невыпуклый не содержит некоторые из них.

Многоугольник, имеющий ровно n сторон (а значит, n углов), принято называть n-угольником.

§ 3.3 УГЛЫ МНОГОУГОЛЬНИКОВ. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Пусть нам дан многоугольник $ABCD$. Рассмотрим вершину A и два луча AB и AD, выходящие из вершины A и содержащие стороны AB и AD данного многоугольника (рис. 3.18).

$\angle BAD$, внутри которого лежит сам многоугольник $ABCD$, называется его *внутренним углом* (рис. 3.18).

Для краткости внутренним углом многоугольника иногда называют и величину этого угла.

Докажем *теорему о свойствах внутренних углов многоугольников*[1]

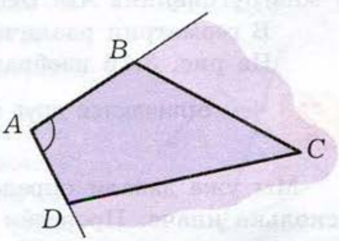


Рис. 3.18

Теорема 2. У любого многоугольника каждый внутренний угол меньше 180°.

Доказательство

1. $ABCDE$ — выпуклый многоугольник, $\angle A$ — его внутренний угол. } (дано) (рис. 3.19а)

2. $\angle A < 180°$ (требуется доказать).

[1] По нашей договорённости, если в тексте написано «многоугольник», значит, речь идёт о выпуклом многоугольнике.

3. $ABCDE$ — выпуклый многоугольник, а значит, лежит по одну сторону от прямой MB, содержащей его сторону AB (рис. 3.19б) (1, определение выпуклого многоугольника).

4. $\angle A$ — внутренний угол многоугольника $ABCDE$, он тоже лежит по одну сторону от прямой MB (рис. 3.19б) (1, 3).

5. $\angle BAM = 180°$ (1, 3, определение развёрнутого угла).

6(2). $\angle A$ составляет часть $\angle BAM$, а значит, он меньше $180°$ (1, 4, 5).

Так как угол A мы выбирали произвольно, то теорема доказана полностью. ■

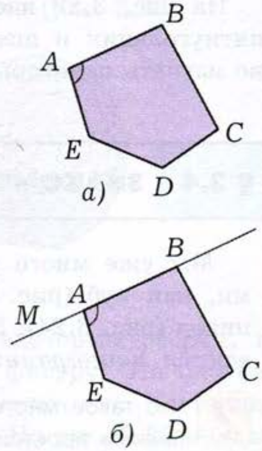


Рис. 3.19

Используя понятие угла многоугольника, дадим определения *прямоугольника* и *квадрата*.

Определение 23. Если все четыре угла четырёхугольника прямые, то четырёхугольник называется прямоугольником.

На рис. 3.20 изображён прямоугольник $ABCD$. У него $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

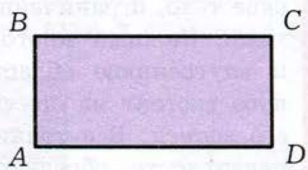


Рис. 3.20

Определение 24. Если все четыре угла четырёхугольника прямые и все его стороны равны, то четырёхугольник называется квадратом.

На рис. 3.21 изображён квадрат $ABCD$. У него $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ и $AB = BC = CD = DA$.

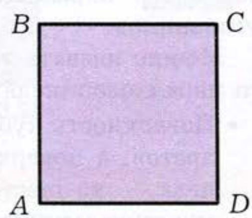


Рис. 3.21

В заключение этого раздела рассмотрим наиболее красивые многоугольники — *правильные*.

Определение 25. Многоугольник, у которого все стороны и все углы равны, называется правильным.

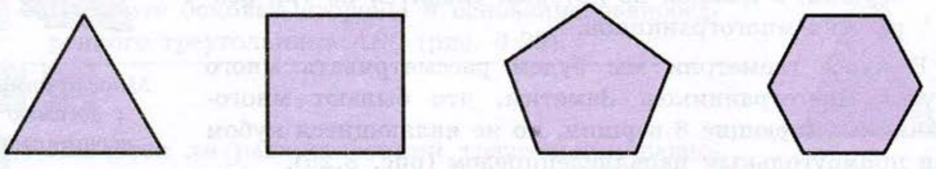


Рис. 3.22

На рис. 3.22 изображены правильные треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник. Пока мы не умеем строить эти фигуры, но изучать некоторые их свойства, зная определение, уже можем.

§ 3.4 ЗНАКОМСТВО С МНОГОГРАННИКАМИ

Мы уже много раз встречались с такими фигурами, как куб (рис. 3.23) и прямоугольный параллелепипед (рис. 3.24). Это примеры фигур, которые называются *многогранниками*.

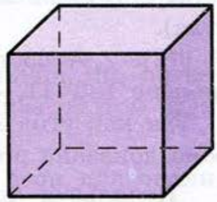


Рис. 3.23

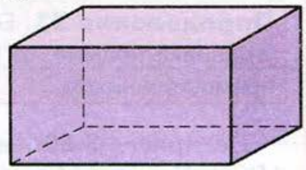


Рис. 3.24

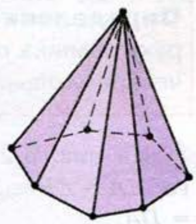
? Что такое многогранник? Как его можно определить? Какими простейшими свойствами он обладает?

В геометрии многогранником называют геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Каждый многогранник имеет поверхность и внутреннюю область. Например, поверхность куба состоит из шести одинаковых квадратов — его *граней*. Все точки куба, не лежащие на его поверхности, образуют его внутреннюю область.

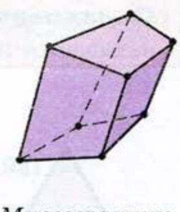
Из рис. 3.24 видно, что поверхность прямоугольного параллелепипеда состоит из шести прямоугольников.

Можно назвать такие свойства куба и прямоугольного параллелепипеда:

- Поверхность куба состоит из шести одинаковых квадратов, а поверхность прямоугольного параллелепипеда — из шести прямоугольников. Перечисленные многоугольники называются гранями соответственно куба и прямоугольного параллелепипеда.
- Грани куба и прямоугольного параллелепипеда попарно пересекаются по 12 отрезкам, которые называются их рёбрами.
- Куб и прямоугольный параллелепипед имеют восемь вершин, в каждой из которых сходятся по три ребра этих многогранников.



Семиугольная пирамида



Многогранник с восемью вершинами

Рис. 3.25

В курсе геометрии мы будем рассматривать много других многогранников. Заметим, что бывают многогранники, имеющие 8 вершин, но не являющиеся кубом или прямоугольным параллелепипедом (рис. 3.25).

Бывают и более сложные и красивые многогранники (рис. 3.26).

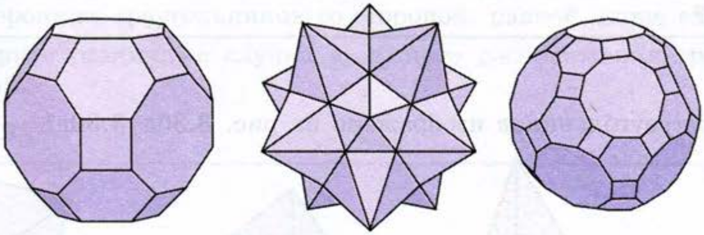


Рис. 3.26

Если разрезать поверхность многогранника по некоторым рёбрам, то иногда её удаётся развернуть в некоторую плоскую фигуру. Эта плоская фигура называется *развёрткой поверхности многогранника*. Часто для краткости говорят также *развёртка многогранника*. На рис. 3.27 показано получение развёртки поверхности прямоугольного параллелепипеда.

А из имеющейся выкройки (развёртки) можно склеить поверхность многогранника. На рис. 3.28 изображена развёртка куба и склеенная из неё поверхность куба.

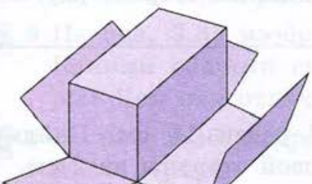


Рис. 3.27

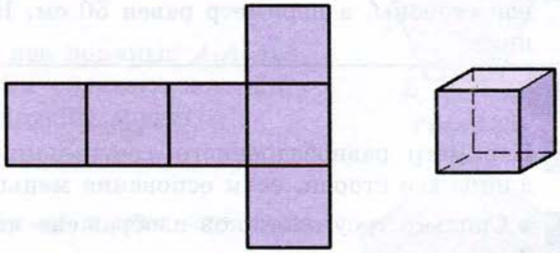


Рис. 3.28

Развиваем умения

К § 3.1

Н ⇓

1 Сколько вершин, сторон и углов имеет треугольник?

2 Назовите боковые стороны и основание равнобедренного треугольника ABC (рис. 3.29).

Н ⇑

3 Является ли равносторонний треугольник равнобедренным? Обоснуйте свой ответ.

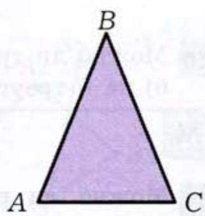
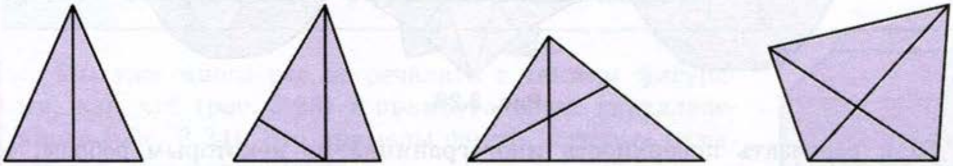


Рис. 3.29

4 Может ли точка лежать вне треугольника и вне каждого из его углов?

Н

5 Сколько треугольников изображено на рис. 3.30а–3.30г?



а) б) в) г)

Рис. 3.30

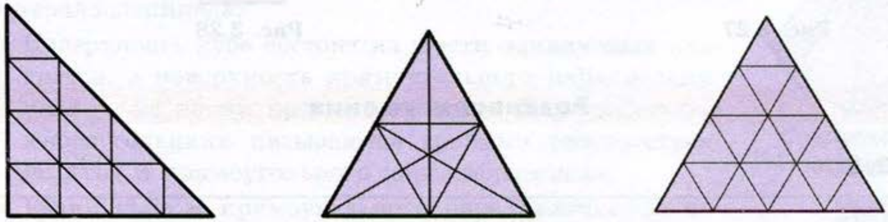
6 Сторона AB треугольника ABC равна 5 см, сторона BC вдвое больше стороны AB, а сторона AC на 2 см меньше стороны BC. Найдите периметр треугольника.

7 В равнобедренном треугольнике ABC основание в 2 раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите длины сторон треугольника.

П

8 Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 13 см. Найдите длины его сторон, если основание меньше боковой стороны на 2 см.

9 Сколько треугольников изображено на рис. 3.31а–3.31в?



а) б) в)

Рис. 3.31

10 Можно ли тремя прямыми разбить треугольник: а) на 5 треугольников; б) на 6 треугольников; в) на 8 треугольников?

М

11 Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?

12 Можно ли из шести спичек составить фигуру, состоящую из четырёх равносторонних треугольников со стороной, равной длине спички?

13 Рассмотрите различные случаи взаимного расположения треугольника и прямой.

К § 3.2–3.3

Н ⇓

14 ● На рис. 3.32 изображена ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5$. Какими свойствами обладает эта фигура?

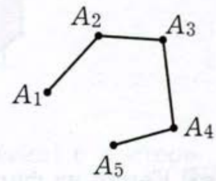


Рис. 3.32

15 ● На рис. 3.33 изображён многоугольник $ABCDEF$.

а) Сколько сторон и вершин у этого многоугольника?

б) Сколько внутренних углов имеет этот многоугольник?

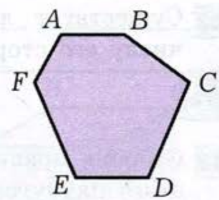


Рис. 3.33

16 ● На рис. 3.34 изображён правильный пятиугольник. Какими свойствами обладают стороны и углы этого многоугольника?

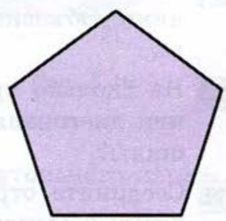


Рис. 3.34

17 ● На рис. 3.35 изображены две ломаные $A_1A_2A_3A_4$. Какими общими свойствами обладают эти фигуры? Чем они отличаются друг от друга?

18 ● На рис. 3.36 изображены две ломаные $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

а) Сколько вершин и звеньев имеют эти ломаные?

б) Какими общими свойствами обладают эти фигуры?

в) Чем эти фигуры отличаются друг от друга?

19 Сколько диагоналей имеет: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?

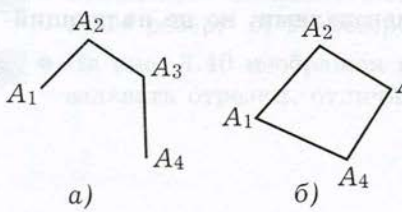


Рис. 3.35

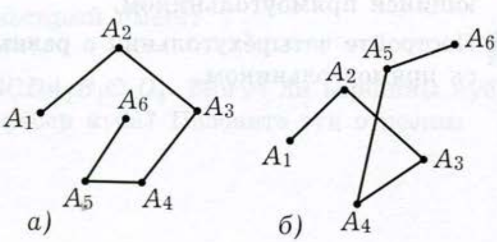


Рис. 3.36

Н ⇑

20 Что надо знать о сторонах и углах многоугольника, чтобы утверждать, что он правильный?

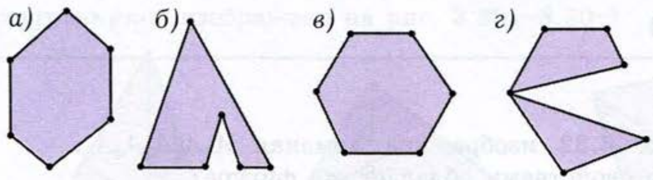


Рис. 3.37

21 Какие из фигур, изображённых на рис. 3.37, являются выпуклыми шестиугольниками?

22 Существует ли многоугольник, число диагоналей которого: а) равно числу его сторон; б) больше числа его сторон?

Н

23 Сторона правильного пятиугольника равна 2 см. Чему равен периметр этого пятиугольника?

24 Начертите выпуклый и невыпуклый многоугольники. Объясните, чем они отличаются друг от друга.

25 На сколько треугольников разбивается пятиугольник диагоналями, проведёнными из одной его вершины?

26 Соедините отрезками все точки на рис. 3.38 так, чтобы в результате получился многоугольник.

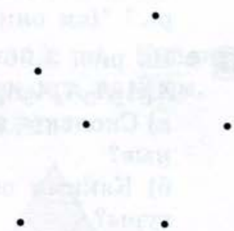


Рис. 3.38

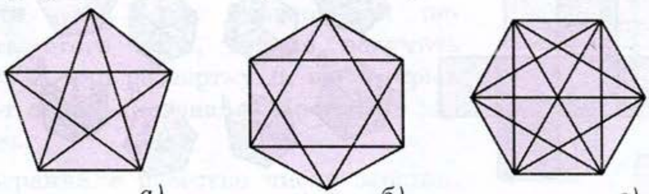
П

27 Постройте четырёхугольник, имеющий два прямых угла, но не являющийся прямоугольником.

28 Постройте четырёхугольник с равными диагоналями, но не являющийся прямоугольником.

М

29 Сколько треугольников изображено на рис. 3.39а—3.39в?



а) *б)* *в)*

Рис. 3.39

30 Сколько диагоналей имеет многоугольник с 103 сторонами; с n сторонами?

К § 3.4

Н ⇓

31 Посмотрите на рис. 3.40 и ответьте на вопросы:

а) Сколько вершин имеет куб?

б) Сколько рёбер имеет куб?

в) Сколько рёбер куба сходится в одной вершине?

г) Какими многоугольниками являются грани куба?

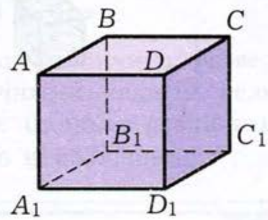


Рис. 3.40

32 Сколько квадратов входит в развёртку куба?

33 Сколько многоугольников входит в развёртку прямоугольного параллелепипеда?

Н ⇑

34 Существуют ли многогранники, гранями которых являются 6 квадратов?

35 Существует ли многогранник, который имеет:

а) 14 рёбер; б) 15 рёбер?

36 На рис. 3.40 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Могут ли вершины куба задавать отрезки, отличные от рёбер куба? Назовите эти отрезки.

37 Какому кубику соответствует развёртка, изображённая на рис. 3.41?

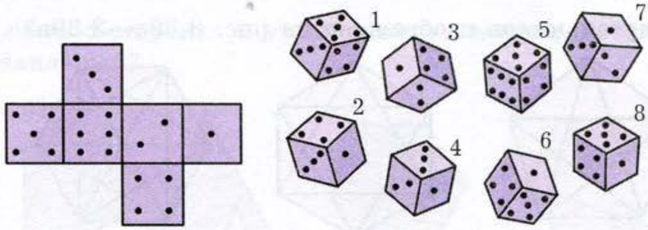


Рис. 3.41

38 На рис. 3.42 изображены игральный кубик и три развёртки поверхности игральных кубиков. Какие из них могут быть развёртками поверхности именно этого кубика?

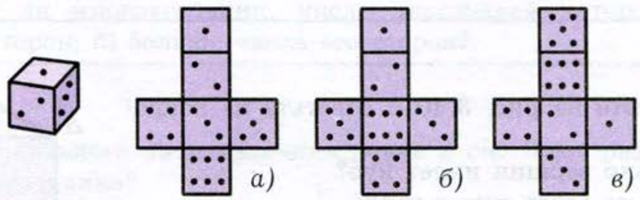


Рис. 3.42

П

39 Нарисуйте многогранник, у которого 7 вершин.

40 Попробуйте нарисовать многогранник, у которого:

а) 6 рёбер;

б) 8 рёбер;

в) 7 рёбер.

41 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вершину A соедините с другими вершинами куба. Сколько отрезков вы получили?

42 Внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка O и соединена со всеми вершинами куба. Сколько отрезков получилось?

43 На модели куба покажите ломаные, вершины которых являются некоторыми из вершин куба, у которых:

а) все звенья лежат в одной плоскости;

б) не все звенья лежат в одной плоскости.

М

44 На гранях картонного куба провели три диагонали (рис. 3.43). Развёртывая поверхность этого куба, можно получить развёртку A или развёртку B, на которых недостаёт одной диагонали. Проведите эту диагональ.

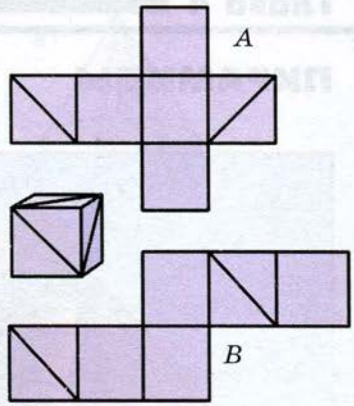


Рис. 3.43

45 В многограннике известно число вершин, причём к каждой вершине подходит одно и то же известное число рёбер. Можно ли по этим данным узнать, сколько у него:

а) плоских углов;
б) рёбер;
в) граней?

Проект «Различные развёртки куба»

Изготовьте из плотного картона как можно больше различных развёрток куба с ребром 10 см (развёртки считаются различными, если их нельзя наложить друг на друга так, чтобы они совпали). Сколько различных развёрток у вас получилось? Докажите, что это число наибольшее.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Изготовление чертежей многогранников.

ВАША РОЛЬ. Чертёжник.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Вам нужно изобразить многогранник таким образом, чтобы у него было как можно больше видимых:

а) вершин;
б) рёбер;
в) граней.

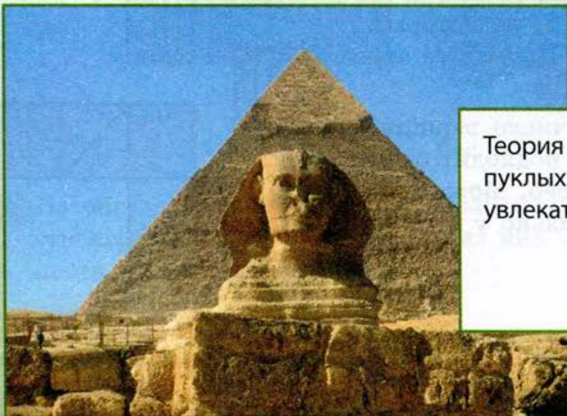
ЗАДАНИЕ: а) Существует ли такой многогранник, у которого более 100 вершин и который можно изобразить таким образом, чтобы все вершины были видимыми?

б) Существует ли такой многогранник, у которого более 100 рёбер и который можно изобразить таким образом, чтобы все рёбра были видимыми?

в) Существует ли такой многогранник, который можно изобразить таким образом, чтобы все его грани были видимыми?

Глава 4

ПИРАМИДЫ



Теория многогранников, в частности выпуклых многогранников, — одна из самых увлекательных глав геометрии.

Лазарь Аронович Люстерник
(русский математик, 1899–1981)

Открываем новые знания

§ 4.1 ПОНЯТИЕ ПИРАМИДЫ. ВИДЫ ПИРАМИД

В главе 2 мы познакомились с трёхгранными и многогранными углами. Пусть нам даны трёхгранный, четырёхгранный и пятигранный углы (рис. 4.1).

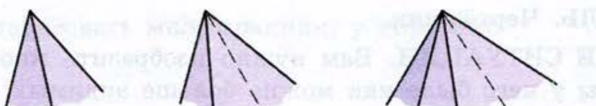


Рис. 4.1

Пересечём эти многогранные углы плоскостями, не проходящими через вершины углов и пересекающими все их боковые рёбра (рис. 4.2).

Рис. 4.2

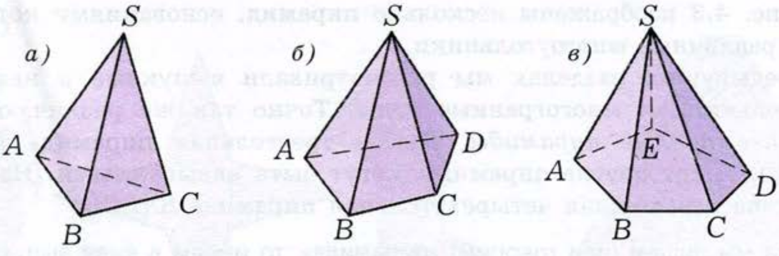


Рис. 4.3

В пересечении мы получим различные многоугольники: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник. Части пространства, ограниченные поверхностями многогранных углов и многоугольниками, полученными в сечении их плоскостью, называются *пирамидами*.

Мы получили треугольную, четырёхугольную и пятиугольную пирамиды (рис. 4.3).

Вершина соответствующего многогранного угла называется *вершиной пирамиды*, а многоугольник, полученный в сечении, — *основанием пирамиды*. Вершины многоугольника в основании пирамиды тоже называют вершинами пирамиды.

Рассмотрим сначала свойства треугольной пирамиды.

На рис. 4.3а изображена треугольная пирамида $SABC$ с вершиной в точке S. *Боковыми гранями* пирамиды являются треугольники SAB, SBC, SCA. Грань ABC является основанием треугольной пирамиды. *Рёбрами пирамиды* являются отрезки SA, SB, SC, AB, BC, CA. Отрезки SA, SB, SC называются боковыми рёбрами пирамиды. Вы видите, что в каждой вершине треугольной пирамиды сходятся три ребра.

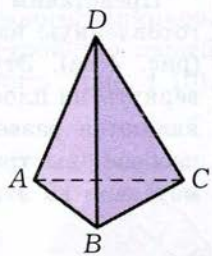


Рис. 4.4

Среди треугольных пирамид выделяют правильные треугольные пирамиды. У *правильной треугольной пирамиды* (рис. 4.4) в основании лежит правильный треугольник, а все её боковые грани представляют собой равные равнобедренные треугольники.

Пирамиды могут быть *четырёхугольными, пятиугольными, шестиугольными, ..., n-угольными* ($n \geqslant 3$). Вид пирамиды определяет многоугольник, который лежит в её основании.

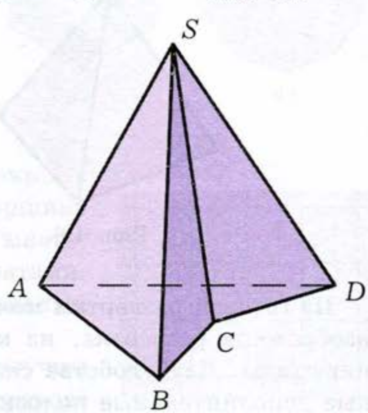


Рис. 4.5

На рис. 4.3 изображены несколько пирамид, основаниями которых являются различные многоугольники.

В предыдущих разделах мы рассматривали выпуклые и невыпуклые многоугольники и многогранные углы. Точно так же различают *выпуклые* и *невыпуклые пирамиды*. Любая треугольная пирамида выпуклая (рис. 4.3). А вот другие пирамиды могут быть невыпуклыми. На рис. 4.5 изображена невыпуклая четырёхугольная пирамида $SABCD$.

! Если мы пишем (или говорим) «пирамида», то имеем в виду выпуклую пирамиду. Если нужно будет рассмотреть невыпуклую пирамиду, то об этом будет сказано особо.

§ 4.2 РАЗВЁРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПИРАМИД

Посмотрите на треугольную пирамиду (рис. 4.6). Если мы разрежем её поверхность по нескольким рёбрам и разложим на поверхности стола, то получим *развёртку поверхности треугольной пирамиды* (рис. 4.7).

Представим себе модель поверхности четырёхугольной пирамиды, изготовленную из гибкого нерастяжимого материала (бумага, картон и т.д.) (рис. 4.8а). Эту модель можно разрезать по нескольким рёбрам и развернуть на плоскости. Мы получим различные многоугольники, которые являются развёртками поверхности данной пирамиды. На рис. 4.8б–4.8г изображены три различные развёртки такой пирамиды. Посмотрите внимательно на эти развёртки.

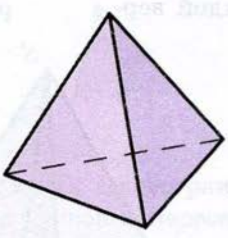


Рис. 4.6

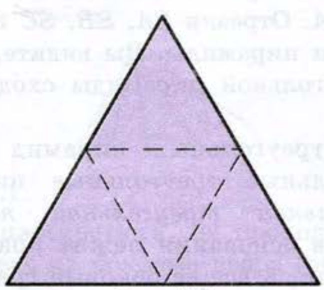


Рис. 4.7

Из готовой развёртки можно склеить модель многогранника. На рис. 4.9 изображена развёртка, из которой можно изготовить модель треугольной пирамиды. Для удобства склеивания на рисунке предусмотрены специальные дополнительные полоски.

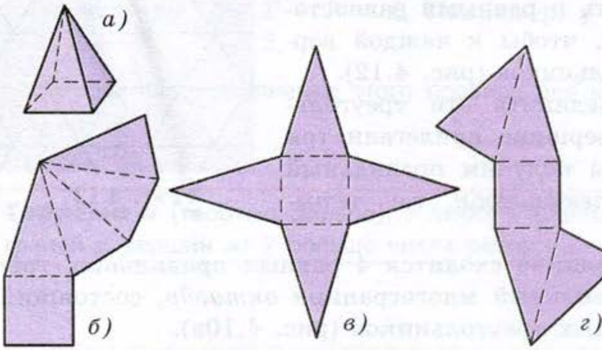


Рис. 4.8

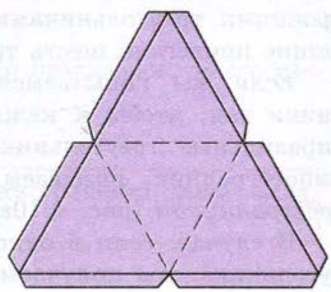


Рис. 4.9

§ 4.3* ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

Правильные многогранники — это особый вид многогранников. Их гранями являются равные между собой правильные многоугольники, а все многогранные углы равны. Математики древности уделяли много внимания изучению этих многогранников. Платон (427–347 гг. до н.э.) связывал с ними устройство нашей Вселенной. Правильных многогранников всего пять (рис. 4.10). Их иногда называют *пять платоновых тел*.

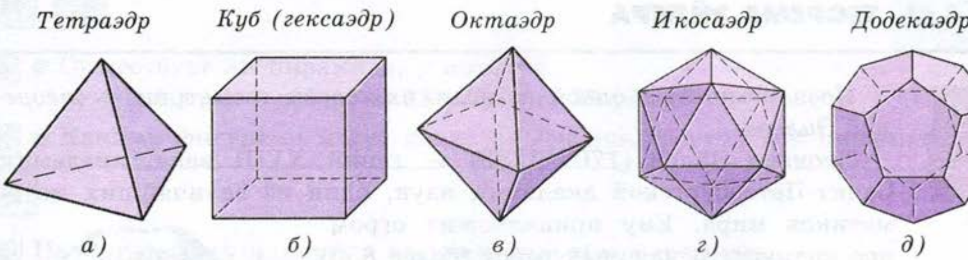


Рис. 4.10

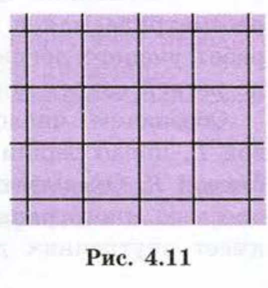


Рис. 4.11

На рис. 4.11 видно, что плоскость можно покрыть равными квадратами так, чтобы к каждой вершине прилегали четыре квадрата. Представим себе многогранник, со всех сторон ограниченный квадратами. У каждой его вершины сходятся только три равных квадрата.

Используя шесть таких квадратов, мы получим *куб*, который ещё называют *гексаэдром*, в переводе с греческого — *шестигранник* (рис. 4.10б).

Можно покрывать плоскость и равными равносторонними треугольниками так, чтобы к каждой вершине прилегали шесть треугольников (рис. 4.12).

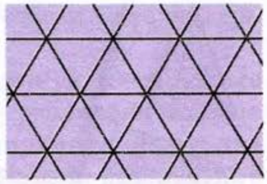


Рис. 4.12

Если мы попытаемся объединить эти треугольники так, чтобы к каждой вершине прилегали три правильных треугольника, мы получим правильный многогранник, называемый *тетраэдром,* т.е. *четырёхгранником* (рис. 4.10а).

В случае, если в одной вершине сходится 4 равных правильных треугольника, мы получаем правильный многогранник *октаэдр*, состоящий из восьми граней — правильных треугольников (рис. 4.10в).

Если в вершине сходятся 5 равных правильных треугольников, мы получаем правильный многогранник, который называется *икосаэдр,* т.е. *двадцатигранник.* Он состоит из двадцати граней — правильных треугольников (рис. 4.10г).

Если все грани многогранника являются равными правильными пятиугольниками, в одной вершине их может сходиться три. Соответствующий правильный многогранник называется *додекаэдром,* т.е. *двенадцатигранником* (рис. 4.10д), он состоит из двенадцати правильных пятиугольников.

Правильный многогранник не может иметь граней с шестью, семью и более углами.

§ 4.4* ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Познакомимся с одной из великих теорем геометрии — *теоремой Эйлера*.

Леонард Эйлер (1707–1783) — гений XVIII века, академик Санкт-Петербургской академии наук, один из величайших математиков мира. Ему принадлежит огромное количество научных работ (более 850) в самых разных областях математики, механики и астрономии. Теорема Эйлера, рассматриваемая в этом параграфе, и ряд других работ учёного легли в основу *топологии* — одной из ветвей современной геометрической науки.

Леонард Эйлер

Обозначим число граней многогранника буквой $Г$, число вершин — буквой $В$, число рёбер — буквой $Р$. Оказывается, эти три числа для любого простого многогранника (простой многогранник не имеет внутренних дыр) связаны одним и тем же соотношением: $В + Г - Р = 2$. Например, у куба: $В = 8$, $Г = 6$, $Р = 12$. Тогда $8 + 6 - 12 = 2$.

? Проверьте выполнение этого правила для каждого правильного многогранника.

Теорема 3 (теорема Эйлера). У любого простого многогранника сумма числа граней и вершин на 2 больше числа рёбер.

Развиваем умения

К § 4.1

Н ⇓

1 Сколько рёбер и граней имеет: а) треугольная пирамида; б) четырёхугольная пирамида; в) пятиугольная пирамида; г) девятиугольная пирамида?

2 Дана треугольная пирамида. Сколько она имеет трёхгранных углов?

3 Сколько трёхгранных углов имеет четырёхугольная пирамида? пятиугольная? n-угольная?

Н ⇑

4 Существует ли пирамида, у которой:
а) 4 ребра; б) 6 рёбер; в) 11 рёбер; г) 30 рёбер?

5 Какими фигурами могут являться сечения треугольной пирамиды?

Н

6 Начертите треугольную и четырёхугольную пирамиды.

7 На модели треугольной пирамиды выполните необходимые измерения и вычислите сумму длин всех рёбер пирамиды.

8 На модели правильной четырёхугольной пирамиды выполните необходимые измерения и вычислите сумму длин всех рёбер пирамиды.

П

9 Возьмите в руки каркасную модель четырёхугольной пирамиды. Какие плоские фигуры могут получиться в сечении этой пирамиды некоторой плоскостью? Выполните соответствующие рисунки.

М

10 Можно ли разрезать куб плоскостью на две части так, чтобы одна из частей была четырёхугольной пирамидой?

11 Можно ли из 8 спичек сложить фигуру, состоящую из квадрата и четырёх треугольников?

К § 4.2

Н ⇓

12 • Из скольких треугольников, равных соответствующим граням треугольной пирамиды, состоит развёртка её поверхности?

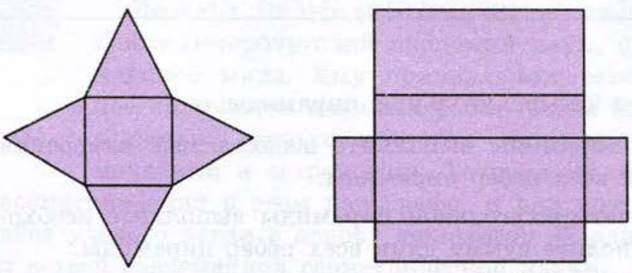
Н ⇑

13 • Могут ли развёртку поверхности треугольной пирамиды составлять неравные между собой фигуры?

Н

14 Начертите развёртку поверхности треугольной пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник, а все боковые рёбра имеют одинаковую длину. Изготовьте из этой развёртки модель поверхности пирамиды.

15 Начертите развёртку поверхности четырёхугольной пирамиды, в основании которой лежит квадрат, а все боковые рёбра имеют одинаковую длину. Изготовьте из этой развёртки модель поверхности пирамиды.



а) *б)*

Рис. 4.13

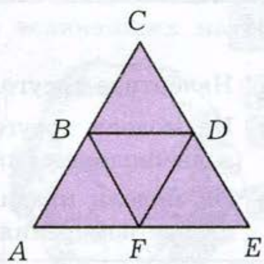


Рис. 4.14

П

16 На рис. 4.13 изображены развёртки поверхностей двух многогранников. Какая из них является развёрткой поверхности пирамиды? Развёртка поверхности какой пирамиды может содержать квадрат? Развёрткой поверхности какого многогранника является вторая фигура?

17 Какие отрезки совместятся при склеивании поверхности пирамиды из развёртки, изображённой на рис. 4.14? Какая пирамида при этом получится?

18 Развёртка поверхности какого многогранника изображена на рис. 4.15?

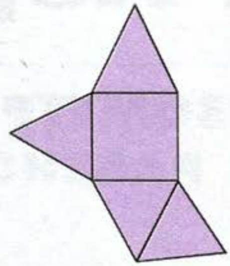


Рис. 4.15

М

19 Длина каждого ребра четырёхугольной пирамиды равна a. Изобразите кратчайший путь (по поверхности пирамиды) между центрами двух боковых граней: а) смежных; б) не смежных.

20 Известно, что развёрткой поверхности тетраэдра является параллелограмм. Что вы можете сказать о сторонах и углах этого параллелограмма?

Проект «Правильные многогранники»

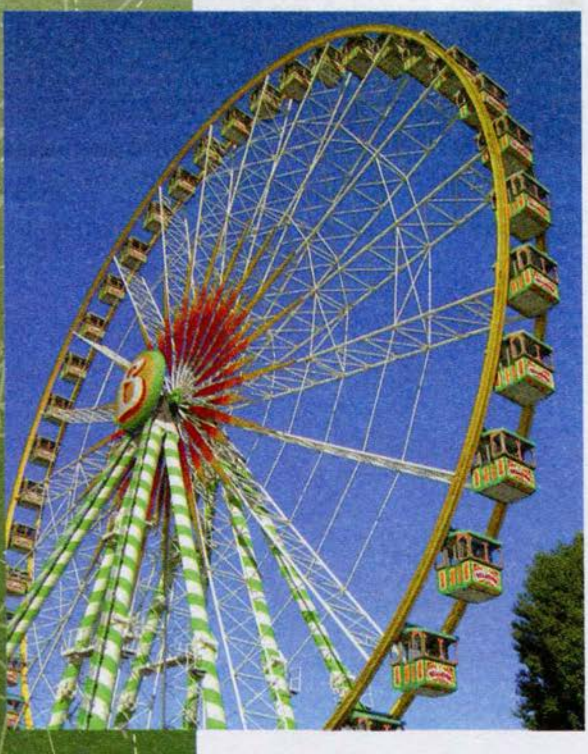
Изготовьте из плотного картона развёртки всех пяти правильных многогранников, а затем склейте правильные многогранники.

РАЗДЕЛ 2

ИЗОМЕТРИИ И РАВЕНСТВО ФИГУР

Симметрия, как бы широко или узко мы ни понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек в течение веков пытался объяснить порядок, красоту и совершенство.

Герман Вейль
(немецкий математик, 1885–1955)



Глава 5

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Без рассмотрения порядка невозможно никакое понимание математики.

Бертран Рассел
(английский философ и математик, 1872–1970)

Открываем новые знания

§ 5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КРУГЛЫХ ФИГУР

Рассмотрим одну из замечательных геометрических фигур — *окружность*.

На рис. 5.1 изображена *окружность*, радиус которой 1 см. Она состоит из всех точек плоскости, находящихся от центра O на расстоянии 1 см.

Определение 26. Множество всех точек плоскости, находящихся на данном положительном расстоянии от данной точки этой плоскости, называется окружностью.

Данная точка называется *центром окружности*. Расстояние от любой точки окружности до её центра называется *радиусом окружности*.

Радиусом окружности называется также отрезок, соединяющий центр окружности с любой её точкой. Радиус окружности обычно обозначается буквой r. На рис. 5.1 $r = OA = 1$ см.

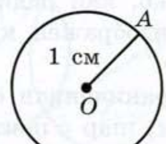


Рис. 5.1

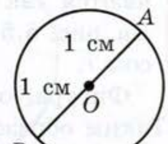


Рис. 5.2

Если продлить радиус окружности за точку O до пересечения с окружностью, мы получим отрезок, называемый *диаметром окружности*. На рис. 5.2 отрезок AB — диаметр окружности.

Окружность с центром в точке O и радиусом r обозначают так: окр. (O, r). Запись читаем: «окружность с центром O и радиусом r».

Есть ещё одно понятие, связанное с окружностью, — *хорда*.

Определение 27. Хордой окружности называется отрезок, концы которого лежат на данной окружности. Можно сказать также: отрезок, соединяющий любые две точки окружности.

На рис. 5.3 мы видим хорды AB, AC, AD окружности. Обратите внимание на то, что диаметр окружности AB на рис. 5.2 также является хордой окружности. Таким образом, диаметр — это хорда окружности, проходящая через её центр.

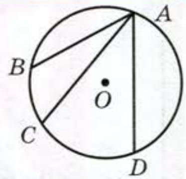


Рис. 5.3

Из определения окружности следует, что это плоская фигура. В пространстве есть похожая фигура — *сфера*.

Сфера определяется в пространстве аналогично тому, как окружность определяется на плоскости.

Определение 28. Сферой называется множество всех точек пространства, удалённых от данной точки на заданное положительное расстояние. При этом данная точка называется центром сферы, а данное расстояние — её радиусом.

Радиус сферы будем обозначать буквой R. Сферу с центром в точке O и радиусом R можно обозначить: сфера (O, R). На рис. 5.4 изображена сфера с центром в точке O и радиусом R.

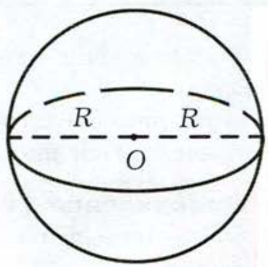


Рис. 5.4

Фигура, ограниченная окружностью, называется *кругом*. Он состоит из точек окр. (O, r) и всех точек плоскости, лежащих внутри окружности. Точки окружности находятся от центра O на расстоянии, равном r, а точки, расположенные внутри круга, — на расстоянии, меньшем r.

Радиус и *диаметр* круга определяются и обозначаются так же, как радиус и диаметр окружности. На рис. 5.5 изображён круг с центром O и радиусом r.

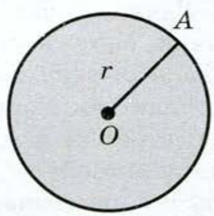


Рис. 5.5

Фигура, ограниченная сферой, называется *шаром*. Таким образом, шар с центром в точке O и радиусом R есть множество всех точек X в пространстве, для которых $OX \leqslant R$ (рис. 5.6).

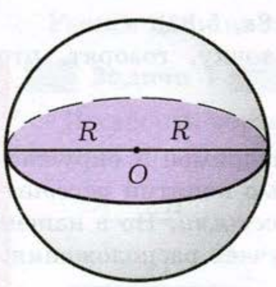


Рис. 5.6

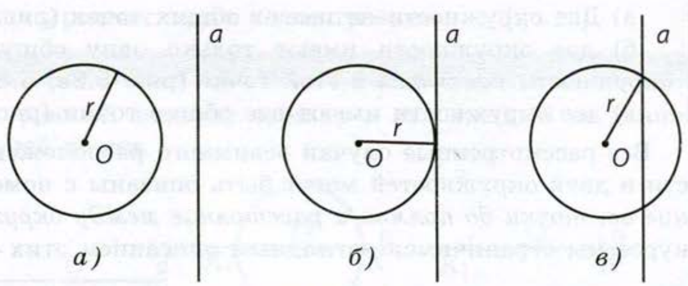


Рис. 5.7

В этой главе мы будем решать задачи на построение. Для решения таких задач широко используются *условия взаимного расположения прямой и окружности* и *двух окружностей*. Начнём с изучения случаев взаимного расположения прямой и окружности.

Так как построения выполняются обычно на части плоскости (скажем, листе бумаги), то мы вначале будем рассматривать расположение прямой и окружности в случае, если *они лежат в одной плоскости*.

Пусть нам даны две фигуры: прямая a и окр. (O, r). Возможны следующие случаи расположения прямой и окружности:

а) прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 5.7а);

б) прямая и окружность имеют только одну общую точку, тогда говорят, что *прямая касается окружности* (такая прямая называется *касательной* к окружности) (рис. 5.7б);

в) прямая пересекает окружность в двух точках (такая прямая называется *секущей* окружности) (рис. 5.7в).

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух окружностей: окр. (O_1, r_1) и окр. (O_2, r_2).

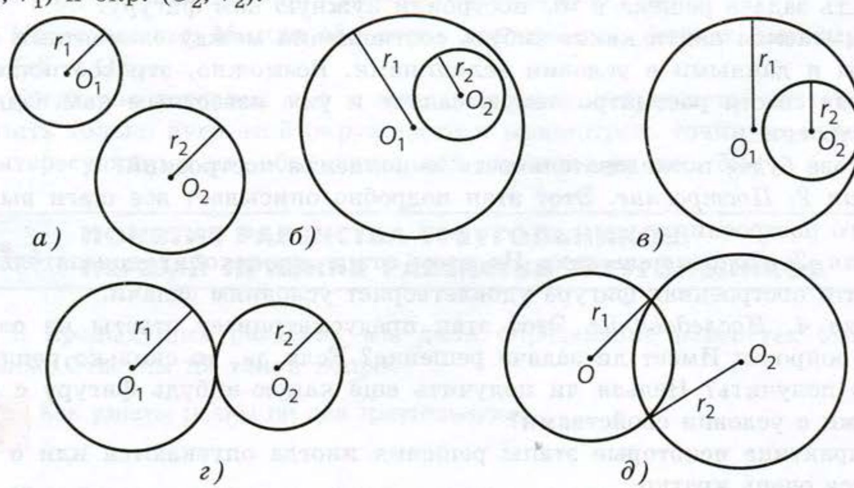


Рис. 5.8

а) Две окружности не имеют общих точек (рис. 5.8а, 5.8б);

б) две окружности имеют только одну общую точку, говорят, что окружности *касаются* в этой точке (рис. 5.8в, 5.8г);

в) две окружности имеют две общие точки (рис. 5.8д).

Все рассмотренные случаи взаимного расположения прямой и окружности и двух окружностей могут быть описаны с помощью понятий *расстояние от точки до прямой и расстояние между окружностями*. Но в нашем курсе мы ограничимся наглядным описанием этих случаев расположения.

§ 5.2 ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЁЖНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Основными инструментами, с помощью которых выполняют построение фигур, являются линейка и циркуль.

С помощью линейки можно построить (в виде отрезка) следующие фигуры:

а) часть произвольной прямой;

б) часть прямой, проходящей через данную точку;

в) часть прямой, проходящей через две данные точки.

С помощью циркуля можно:

а) построить окружность данного радиуса с центром в данной точке;

б) отложить данный отрезок на данной прямой от данной точки.

Полное решение задач на построение состоит из четырёх этапов.

Этап 1. Анализ. Не имея плана решения задачи, невозможно выполнить даже самое простое построение. Первый этап, определяющий такой план, называют *анализом*. На этом этапе мы рассуждаем так:

Пусть задача решена и мы построили нужную нам фигуру.

Попытаемся найти какие-нибудь соотношения между элементами этой фигуры и данными в условии величинами. Возможно, эти соотношения позволят свести рассматриваемую задачу к уже известным нам задачам на построение.

Какова будет последовательность выполнения построений?

Этап 2. Построение. Этот этап подробно описывает все шаги выполняемого построения.

Этап 3. Доказательство. На этом этапе происходит доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

Этап 4. Исследование. Этот этап предусматривает ответы на следующие вопросы: Имеет ли задача решение? Если да, то сколько решений можно получить? Нельзя ли получить ещё какую-нибудь фигуру с указанными в условии свойствами?

На практике некоторые этапы решения иногда опускаются или о них говорится очень кратко.

Решим одну из самых простых задач на построение.

Задача 1

Построить отрезок, равный данному отрезку и отложенный на данной прямой от данной на ней точки.

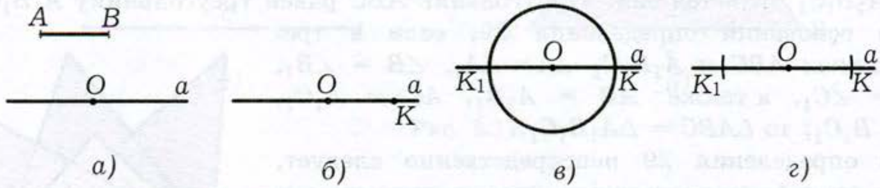


Рис. 5.9

Решение

Нам дан отрезок AB, прямая a и на ней точка O (рис. 5.9а).

Анализ. Предположим, что задача решена и мы на прямой a от точки O отложили отрезок OK, равный данному отрезку AB (рис. 5.9б). Так как $OK = AB$, то точка K лежит на окружности с центром O и радиусом, равным AB.

Построение:

1. С помощью циркуля строим окружность с центром в точке O и радиусом AB (рис. 5.9в).
2. Окружность пересечёт прямую a в точках K и K_1 (рис. 5.9в).
3. Получим нужные нам отрезки $OK = AB$ и $OK_1 = AB$ (рис. 5.9г).

Доказательство. Равенство полученных отрезков следует из определения окружности и свойств измерения отрезков.

Исследование. Можно построить два отрезка, равных данному: отрезки OK и OK_1.

Когда мы говорим, что нужно построить окружность, достаточно построить только дуги этой окружности и рассмотреть точки их пересечения с интересующими нас объектами, как показано на рис. 5.9г.

§ 5.3 ПОНЯТИЕ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В предыдущих разделах мы дали определение равенства отрезков и углов. Ответим на такой вопрос:

? Как узнать, равны ли два треугольника?

Начнём с определения равенства треугольников.

Определение 29. Два треугольника называются равными, если стороны одного соответственно равны сторонам другого и углы, заключённые между соответственно равными сторонами, равны.

Равенство фигур в геометрии обозначают знаком « = ». Запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ читается так: «треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$».

На основании определения 29, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, а также $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

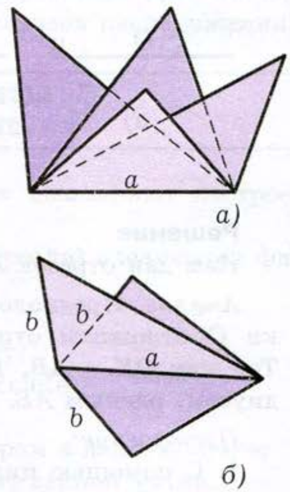


Рис. 5.10

Из определения 29 непосредственно следует, что в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны.

Чтобы установить равенство треугольников, вовсе не обязательно устанавливать равенство всех пар соответствующих сторон и углов. Оказывается, достаточно установить равенство лишь некоторых из них.

Теоремы, с помощью которых можно установить равенство треугольников, называются *признаками равенства треугольников*. Формулировки и доказательства этих признаков тесно связаны с *задачами на построение треугольников*.

Рассмотрим возможности построения треугольника, если нам известны одна, две или три его стороны.

Пусть дана одна сторона треугольника — отрезок a. На плоскости можно построить сколько угодно треугольников со стороной a, не равных между собой (рис. 5.10а).

Если даны две стороны треугольника — отрезки a и b, мы также можем на плоскости построить сколько угодно неравных между собой треугольников со сторонами a и b (рис. 5.10б).

Построим теперь треугольник по трём сторонам. При построении будем использовать циркуль и линейку. Решение задачи проведём по всем правилам, описанным выше.

Задача 2

Построить треугольник по трём сторонам a, b, c.

Решение

На рис. 5.11а нам даны три стороны треугольника — отрезки a, b, c.

Анализ. Пусть треугольник ABC построен: $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 5.11б).

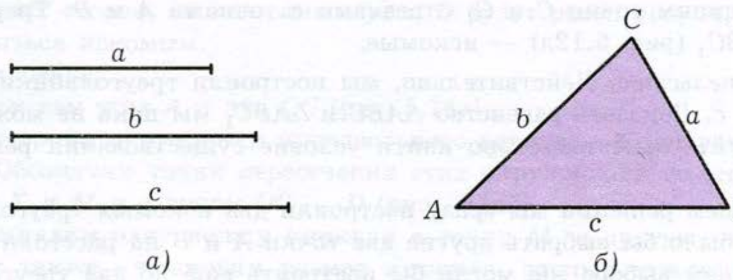


Рис. 5.11

Понятно, что для решения задачи можно на произвольной прямой отложить отрезок AB длиной c. Мы получим две вершины A и B искомого треугольника. Так как длина стороны AC равна b, то точка C лежит на окружности $(A,\ b)$. По аналогичной причине точка C лежит на окружности $(B,\ a)$. Таким образом, точка C — общая точка этих окружностей.

Построение:

1. Проведём произвольную прямую p и отметим на ней точку A (рис. 5.12а).

2. Отложим на прямой p от точки A отрезок AB, равный данному отрезку с (рис. 5.12б).

3. Построим окружность с центром в точке A и радиусом b (рис. 5.12в).

4. Построим окружность с центром в точке B и радиусом a (рис. 5.12г).

5. Построенные окружности могут пересекаться в точках C и C_1 (рис. 5.12г).

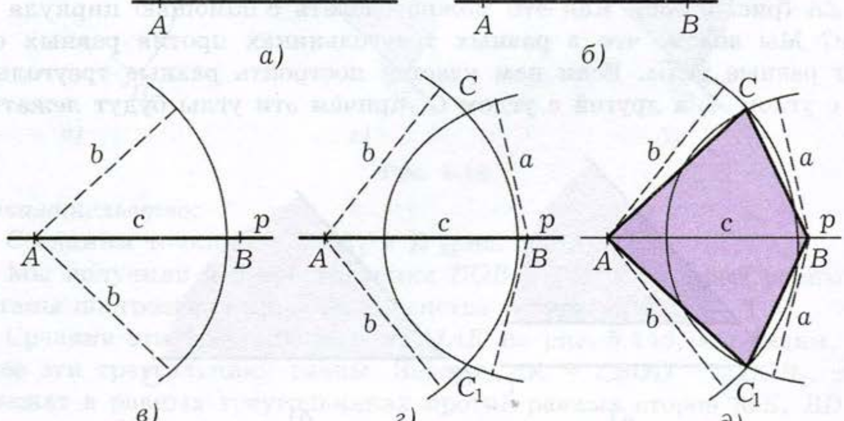


Рис. 5.12

6. Соединим точки C и C_1 отрезками с точками A и B. Треугольники ABC и ABC_1 (рис. 5.12д) — искомые.

Доказательство. Действительно, мы построили треугольники со сторонами a, b, c. Доказать равенство $\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$ мы пока не можем.

Попробуйте самостоятельно найти условие существования решения задачи.

При нашем решении мы сразу построили два искомых треугольника.

Можно было бы выбрать другие две точки A и B на расстоянии c. При каждом таком выборе мы могли бы построить ещё по два треугольника с заданными сторонами. Все эти треугольники равны между собой.

В геометрии говорят, что решение задачи 2 с точностью до равенства единственное.

Сформулируем признак равенства треугольников по трём сторонам.

Теорема 4. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пользуясь решением задачи 2 и Т.4, решим ещё две задачи на построение.

Задача 3

Построить угол, равный данному, одна из сторон которого совпадает с данным лучом.

Решение

Дан угол A и луч OC (рис. 5.13а). Нужно построить угол с заданной стороной OC, равный данному углу.

Анализ. Предположим, что задача решена и мы построили $\angle O$, равный $\angle A$ (рис. 5.13б). Как это можно сделать с помощью циркуля и линейки? Мы знаем, что в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Если нам удастся построить равные треугольники, один с углом A, а другой с углом O, причём эти углы будут лежать про-

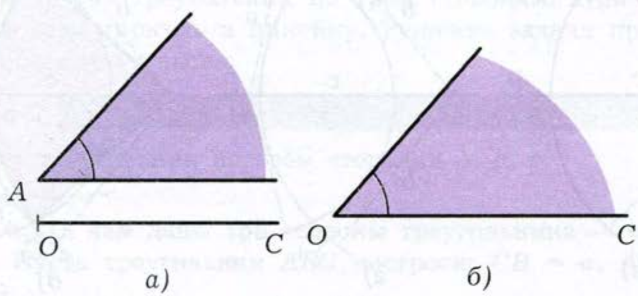


Рис. 5.13

тив равных сторон, то тем самым угол O будет равен углу A, то есть будет являться искомым.

Построение:

1. Нам дан угол A и луч OC (рис. 5.14а).

2. Построим окружности произвольного радиуса r с центрами в точках A и O. Обозначим точки пересечения этих окружностей со сторонами угла A — K и M и с лучом OC — D (рис. 5.14б).

3. Поставим одну ножку циркуля в точку M, а другую — в точку K (говорят также «установим размах циркуля, равный отрезку MK»). Построим окружность с центром D и радиусом MK. Обозначим точки пересечения окружностей с центрами в точках O и D — B и B_1 (рис. 5.14в).

4. Проведём лучи OB и OB_1. Углы BOD и DOB_1 — искомые (рис. 5.14г).

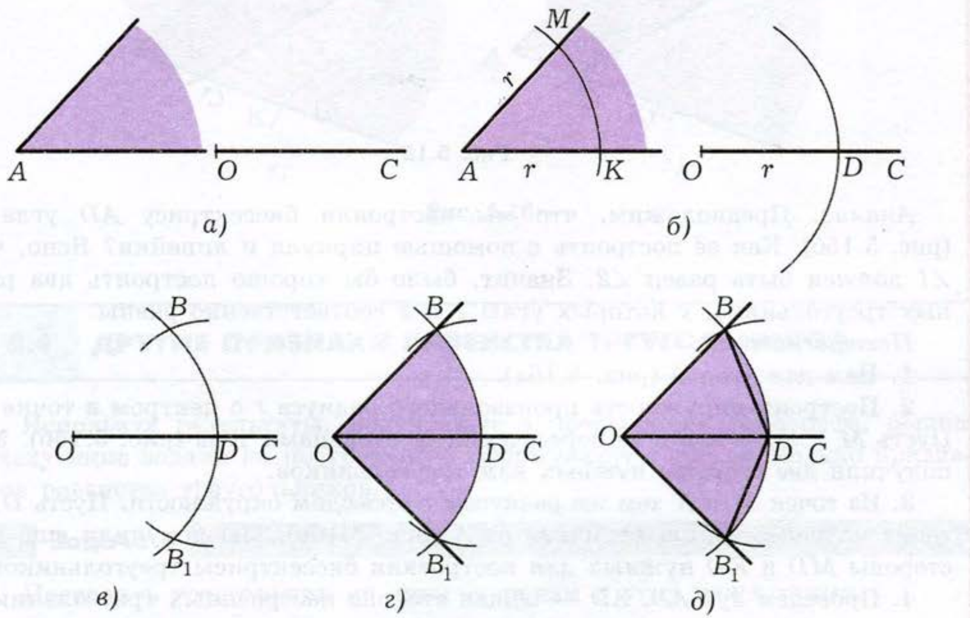


Рис. 5.14

Доказательство:

1. Соединим точки B и D, B_1 и D (рис. 5.14д).

2. Мы получили два треугольника DOB и DOB_1, которые равны (1-й и 2-й этапы построения, признак равенства треугольников — Т.4).

3. Сравнив эти треугольники с $\triangle MAK$ на рис. 5.14б, мы видим, что по Т.4 все эти треугольники равны. Значит, $\angle A = \angle BOD = \angle DOB_1$, так как они лежат в равных треугольниках против равных сторон MK, BD и B_1D соответственно.

Исследование. Можно построить два угла, равных данному, одна из сторон которых совпадает с данным лучом.

Задача 4

Построить биссектрису данного угла.

Решение

Нам дан угол A (рис. 5.15а). Нужно построить биссектрису этого угла.

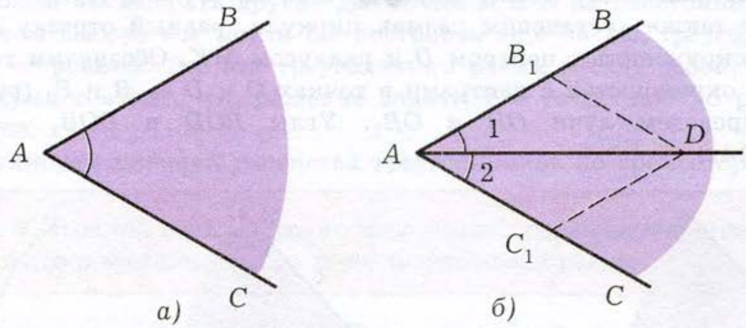


Рис. 5.15

Анализ. Предположим, что мы построили биссектрису AD угла A (рис. 5.15б). Как её построить с помощью циркуля и линейки? Ясно, что $\angle 1$ должен быть равен $\angle 2$. Значит, было бы хорошо построить два равных треугольника, у которых углы *1* и *2* соответственно равны.

Построение:

1. Нам дан угол A (рис. 5.16а).

2. Построим окружность произвольного радиуса r с центром в точке A. Пусть M и K — точки её пересечения со сторонами угла (рис. 5.16б). Мы получили две стороны нужных нам треугольников.

3. Из точек M и K тем же радиусом r проводим окружности. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A (рис. 5.16в). Мы получили ещё две стороны MD и KD нужных для построения биссектрисы треугольников.

4. Проведём луч AD. AD — общая сторона построенных треугольников и искомая биссектриса угла A (рис. 5.16г).

Доказательство. Мы получили два треугольника AMD и AKD. Они равны по признаку равенства треугольников — по трём сторонам (обоснуйте это самостоятельно). Из равенства этих треугольников следует равенство углов MAD и KAD, так как они лежат в равных треугольниках против равных сторон.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

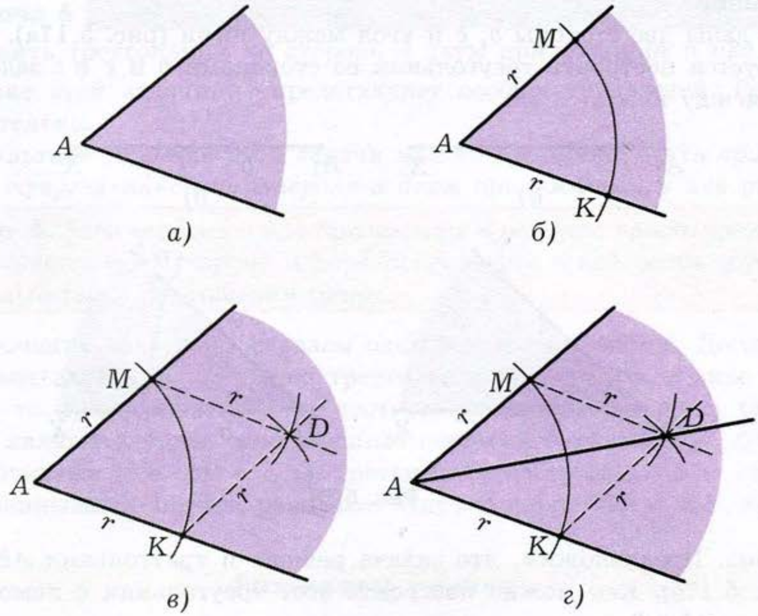


Рис. 5.16

§ 5.4 ДРУГИЕ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Используя результаты, полученные в предыдущем параграфе, решим следующие задачи на построение и сформулируем ещё несколько признаков равенства треугольников.

Задача 5

Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

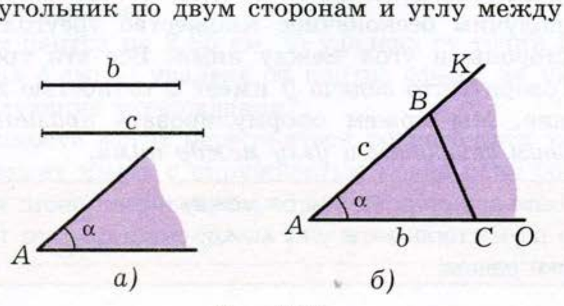


Рис. 5.17

Решение

Нам даны две стороны b, c и угол между ними (рис. 5.17а).

Требуется построить треугольник со сторонами b и c и с заданным углом A между ними.

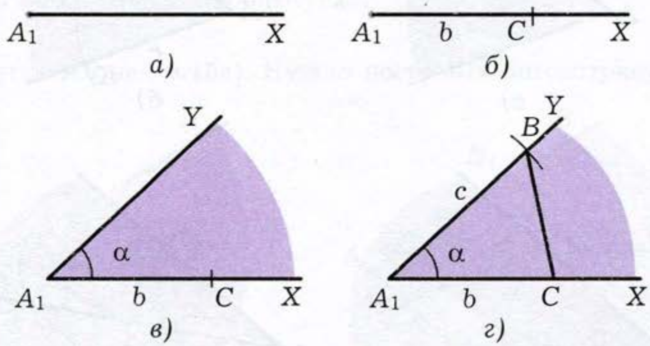


Рис. 5.18

Анализ. Предположим, что задача решена и треугольник ABC построен (рис. 5.17б). Как можно построить этот треугольник с помощью циркуля и линейки?

На луче AO от точки A отложим сторону b. От луча AO откладываем угол, равный данному углу A. На луче AK от точки A откладываем сторону c. Соединим точки B и C.

Построение:

1. Проведём произвольный луч A_1X (рис. 5.18а).
2. На луче A_1X отложим отрезок A_1C длины b (рис. 5.18б).
3. Построим угол A_1, равный углу A (рис. 5.18в).
4. На луче A_1Y отложим отрезок A_1B длины c (рис. 5.18г).
5. Проведём отрезок BC. Треугольник A_1BC — искомый (рис. 5.18г).

Доказательство и исследование для этой задачи проведите самостоятельно.

Выбирая разные положения луча A_1X и выполняя каждый раз построение, мы получим бесконечное множество треугольников, имеющих две заданные стороны и угол между ними. Все эти треугольники равны между собой. Говорят, что задача 5 имеет с точностью до равенства единственное решение. Мы можем сформулировать *признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними*.

Теорема 5. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Задача 6

Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Решение этой задачи не представляет особых трудностей. Решите её самостоятельно.

В результате решения этой задачи можно сформулировать *признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам.*

Теорема 6. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

В заключение параграфа сделаем одно важное замечание. Договоримся, что если мы записали равенство треугольников, скажем, в виде $\triangle ABC = \triangle MNK$, то предполагается, что соответственными друг другу (а значит, равными) являются углы, обозначенные первыми буквами (т.е. $\angle A = \angle M$), вторыми буквами (т.е. $\angle B = \angle N$), третьими буквами (т.е. $\angle C = \angle K$). Тогда соответственными (а значит, равными) будут стороны: $AB = MN$, $AC = MK$, $BC = NK$.

Развиваем умения

К § 5.1

Н ⇓

1 Заполните пропуски: *множество всех точек ..., находящихся на данном положительном расстоянии от данной точки, называется ... .*

2 Заполните пропуски: *хордой окружности называется ..., концы которого принадлежат ... .*

Н ⇑

3 а) Принадлежит ли окружности её центр?

б) Принадлежит ли кругу его центр?

4 Диаметр сферы равен 3 см. Определите, внутри или вне сферы расположена точка A, если она:

а) удалена от центра на 2,85 см; б) удалена от точки B, принадлежащей сфере, на 4 см; в) удалена от центра сферы на $\sqrt{2}$ см.

5 Верны ли следующие утверждения?

а) Две окружности могут пересекаться ровно в трёх точках.

б) Прямая может иметь с окружностью ровно одну общую точку.

в) Две сферы могут пересекаться ровно в одной точке.

г) Две сферы могут пересекаться по окружности.

Н

6 Радиус окружности равен 5 см. Чему равен диаметр окружности?

7 Радиус шара равен 10 см. Чему равен диаметр шара?

8 Постройте на листе бумаги окружность с радиусом 3 см. Можно ли найти на этой окружности такие точки M и N, для которых:
а) $MN = 2$ см; б) $MN = 3$ см; в) $MN = 6$ см; г) $MN = 7$ см?
Отметьте на выполненном рисунке эти точки.

9 Нарисуйте окружность. а) Отметьте на ней точку. Сколько можно провести через неё диаметров? А хорд? Какая из этих хорд будет, по-вашему, наибольшей? А наименьшей? б) Теперь отметьте точку внутри нарисованной окружности. Сколько можно провести через неё диаметров? Сколько хорд?

10 Нарисуйте окружность. а) Какую фигуру образуют середины всех её радиусов? б) Пусть A — её центр, а B — точка на окружности. Какую фигуру образуют все точки X, такие, что $AX = 2AB$?

11 Каково взаимное расположение двух окружностей, если расстояние между их центрами равно 4 см, а радиусы соответственно равны:
а) 1 см и 3 см; б) 3 см и 5 см; в) 2 см и 1 см;
г) 3 см и 7 см; д) 1 см и 4 см; е) 4 см и 4 см?

12 Постройте две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Сколько общих точек имеют эти окружности? Чему равно расстояние между их центрами?

П

13 Постройте точки, находящиеся на расстоянии a от данной точки A и на расстоянии b от другой данной точки B. При каком условии задача: а) имеет решение; б) не имеет решения?

14 Прямая a пересекает окр. (O, r) в точках A и B. Какую фигуру образует множество всех точек X этой прямой, для которых: а) $OX = r$; б) $OX \leqslant r$; в) $OX < r$; г) $OX \geqslant r$; д) $OX > r$; е) $OX \neq r$?

15 Дана окр. (O, r). Какую фигуру образует множество всех таких точек X плоскости, в которой лежит данная окружность, для которых: а) $OX < r$; б) $OX > r$; в) $OX \geqslant r$; г) $0 < OX \leqslant r$?

М

16 На окружности отмечены 10 точек (рис. 5.19). За один ход играющий проводит отрезок с концами в каких-либо двух из этих точек, но так, чтобы он не пересекал ранее проведённых отрезков. Играют двое, поочерёдно делая ходы. Тот, кто не может сделать ход, считается

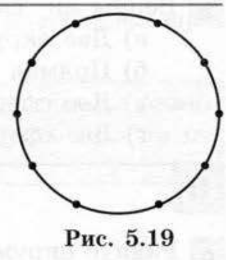


Рис. 5.19

проигравшим. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или второй играющий?

17 Расстояние от пункта A до пункта B равно 20 км, а от пункта B до пункта C — 12 км. Каким может быть расстояние от пункта A до пункта C? Для случаев, когда это расстояние принимает наибольшее или наименьшее из возможных значений, сделайте рисунок, приняв расстояние в 1 км за 1 см.

18 Можно ли четыре одинаковых мяча расположить так, чтобы каждый касался трёх остальных?

К § 5.2–5.3

Н $\Downarrow$

19 Какие фигуры можно построить с помощью: а) линейки; б) циркуля?

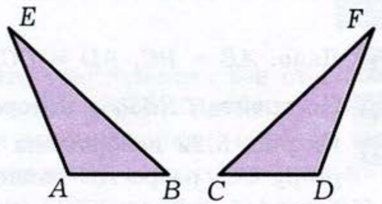


Рис. 5.20

20 Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.

а) $AB = 5$ см, $\angle A = 90°$. Чему равна сторона A_1B_1? Чему равен угол A_1?

б) $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

в) $\angle A = 34°$, $\angle B = 56°$. Найдите углы A_1 и B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

г) $\angle A_1 = 76°$, $A_1B_1 = 10$ см, $C_1A_1 = 5$ см. Найдите $\angle A$, AB, CA.

21 Дано, что $\triangle ABE = \triangle DCF$ (рис. 5.20). Заполните пропуски в записях:

а) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \dots$, $\angle E = \dots$;

б) $AB = \dots$, $AE = \dots$, $BE = \dots$.

22 С помощью какого инструмента можно на прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному?

Н $\Uparrow$

23 Какие вы можете предложить способы, чтобы выяснить, что два треугольника равны?

24 Верны ли следующие утверждения?

а) Треугольник, равный равнобедренному треугольнику, является равнобедренным.

б) Треугольник, равный остроугольному треугольнику, является тупоугольным.

в) Существуют два равных треугольника, один из которых является прямоугольным, а другой — тупоугольным.

г) В правильной пирамиде одна грань может быть остроугольным треугольником, другая — тупоугольным.

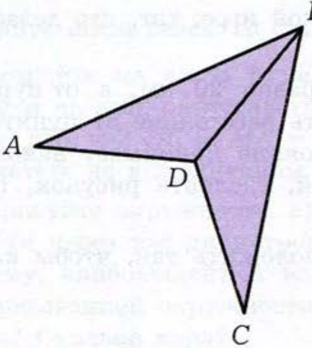


Рис. 5.21

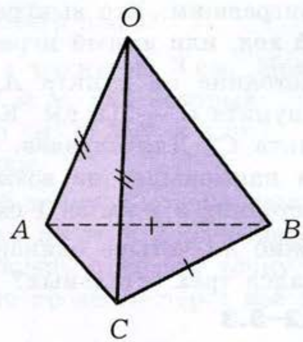


Рис. 5.22

Н

25 Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 5.21). Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CBD$.

26 Постройте $\triangle RST$, у которого $RS = 5$ см, $RT = 3$ см и $\angle R = 35°$.

27 На рис. 5.22 изображена треугольная пирамида $OABC$. Ребро OA равно ребру OC, ребро AB равно ребру CB. Докажите, что грани AOB и COB равны.

28 Постройте $\triangle ABC$, у которого $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$ и $\angle B = 60°$. Если построить несколько треугольников ABC с теми же данными, как они будут соотноситься между собой?

П

29 Постройте $\triangle ABC$, у которого $\angle A = 40°$, $AC = 6$ см и $CB = 4$ см. Затем постройте $\triangle DEF$, у которого $\angle D = 40°$, $DF = 6$ см и $FE = 4$ см. Обязательно ли $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ равны?

30 В пирамиде $OABC$ (рис. 5.23) $AB = OC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что грани OCA и BAC равны.

31 Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle APC = \triangle A_1P_1C_1$.

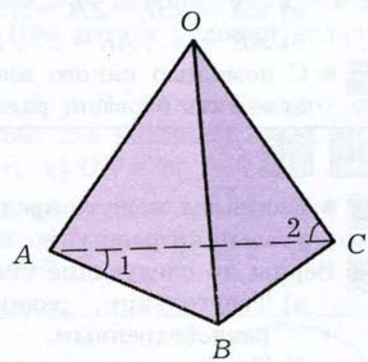


Рис. 5.23

32 Дано: $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 5.24). Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

33 Дано: AD — биссектриса угла BAC, $AB = AC$ (рис. 5.25). Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ACD$.

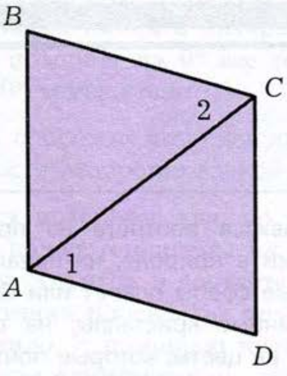


Рис. 5.24

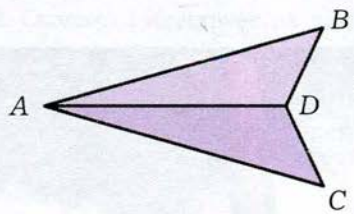


Рис. 5.25

34 Пользуясь одной лишь линейкой, постройте треугольник, все стороны которого имеют разную длину (не равны между собой). Затем постройте второй треугольник, равный первому, и опишите шаги, которые вы сделали. Сколько существует способов построения второго треугольника? Сколькими из шести элементов первого треугольника вы воспользовались для построения второго? Какое наименьшее число попарно равных элементов нужно взять, чтобы гарантировать равенство этих треугольников?

35 У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

36 У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB - BC = A_1B_1 - B_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

37 Отрезки AB и A_1B_1 имеют общую середину O. Докажите, что:

а) отрезки AA_1 и BB_1, A_1B и AB_1 равны;

б) середины отрезков A_1A и B_1B лежат на одной прямой с точкой O.

38 С помощью циркуля и линейки разделите угол величиной 90° на три равные части.

39 С помощью циркуля и линейки разделите угол величиной 19° на 19 равных частей.

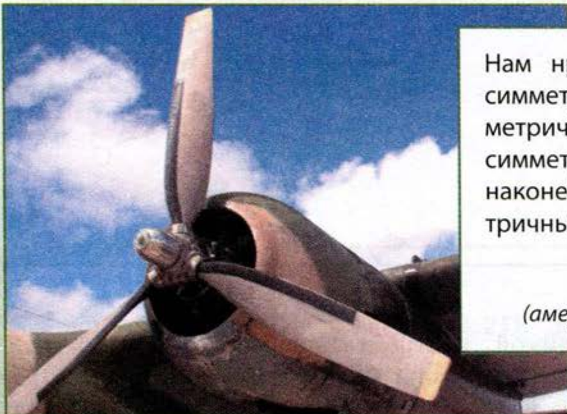
Исследовательский проект «Построение угла, содержащего целое количество градусов»

При каких целых n ($0 < n < 90$) можно построить угол величиной $n°$ с помощью циркуля и линейки?

Замечание. Это сложное задание. Для начала найдите хотя бы несколько таких углов. В ходе дальнейшего изучения геометрии возвращайтесь к этому проекту.

Глава 6

ИЗОМЕТРИИ



Нам нравится смотреть на проявления симметрии в природе, на идеально симметричные сферы планет или Солнца, на симметричные кристаллы, на снежинки, наконец, на цветы, которые почти симметричны.

Ричард Фейнман
(американский физик-теоретик, 1918–1988)

Открываем новые знания

§ 6.1 ПОВОРОТ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

На рис. 6.1 изображён поворот плоского Буратино на углы 110° и 50° вокруг некоторой точки O. Мы видим, что при повороте Буратино переходит из одного положения на плоскости в другое. Мы будем рассматривать повороты фигур на данной плоскости.

На рис. 6.2 изображён поворот $\triangle ABC$ на угол 50° по часовой стрелке вокруг данной точки O. При этом $\triangle ABC$ перешёл в $\triangle A_1B_1C_1$. Мы видим, что $\triangle A_1B_1C_1$ равен $\triangle ABC$.

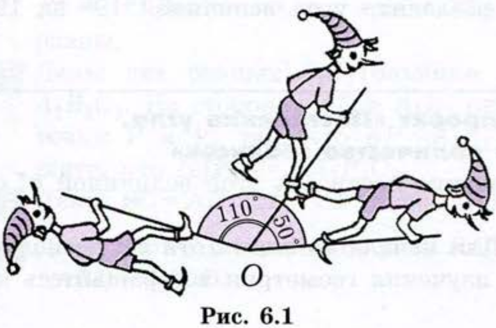


Рис. 6.1

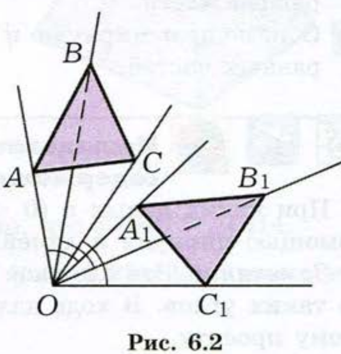


Рис. 6.2

Угол поворота γ, то есть угол, на который мы поворачивали фигуру, всегда заключается в интервале от $0°$ до $180°$: $0° < \gamma \leqslant 180°$.

При повороте на $0°$ все точки фигуры остаются на месте. Такой поворот на $0°$ только один.

? На плоскости взята фигура и точка O. Сколько существует на данной плоскости поворотов данной фигуры вокруг данного центра O на угол $50°$?

Таких поворотов два: по часовой стрелке и против часовой стрелки.

При повороте фигуры на данный угол каждой её точке по некоторому правилу ставится в соответствие некоторая другая (а возможно, и та же самая) точка плоскости, причём единственная.

Правило, с помощью которого каждой точке плоскости ставится в соответствие единственная, вполне определённая точка этой плоскости, называется *геометрическим преобразованием* плоскости, или просто *преобразованием.*

Поворот является частным случаем геометрического преобразования плоскости. Позже мы рассмотрим также другие геометрические преобразования.

Определение 30. Поворотом плоской фигуры Φ вокруг точки O на данный угол α ($0° < \alpha \leqslant 180°$) в данном направлении называется такое преобразование, при котором каждой точке X фигуры Φ сопоставляется такая точка X_1, что:

а) $OX = OX_1$;

б) $\angle X_1OX = \alpha$;

в) луч OX_1 откладывается от луча OX в заданном направлении.

Точка O называется центром поворота, а угол α — углом поворота.

На рис. 6.3 фигура Φ_1 получена при повороте фигуры Φ вокруг точки O на угол α по часовой стрелке.

Мы видим, что точки A, B, C и D фигуры Φ перешли соответственно в точки A_1, B_1, C_1 и D_1 фигуры Φ_1. При этом $OA = OA_1$, $OB = OB_1$, $OC = OC_1$, $OD = OD_1$, $\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \angle COC_1 = \angle DOD_1 = \alpha$.

! Поворот фигуры вокруг данной точки на данный угол рассматривается только на плоскости.

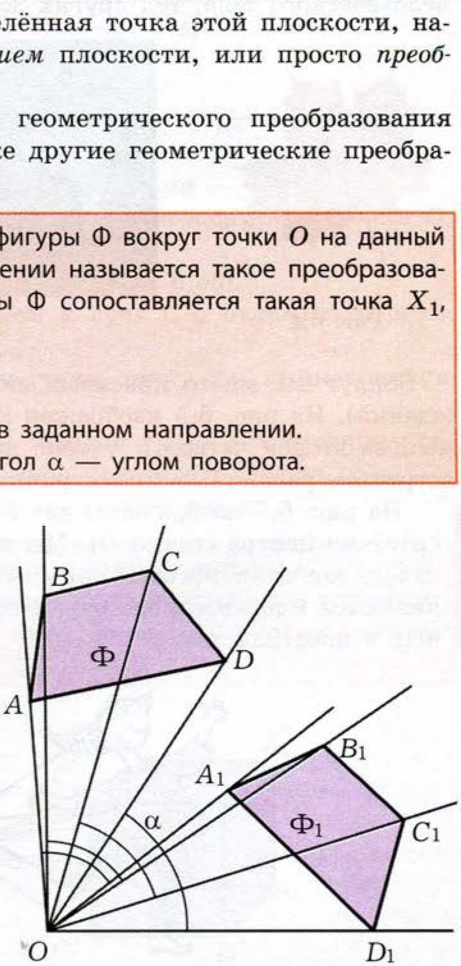


Рис. 6.3

Для пространства мы в старших классах изучим преобразование, которое называется *вращение фигуры вокруг оси*.

§ 6.2 ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ. ИЗОМЕТРИЯ

Есть такие понятия, которые пронизывают всю нашу жизнь. Одним из них является *симметрия*, что в переводе с греческого означает «соразмерность».

Под словом «симметрия» мы подразумеваем совпадение, согласованность размеров. Для людей симметрия прежде всего означает правильность форм — человеческого тела, тел других живых существ, растений (рис. 6.4).

Рис. 6.4

Рис. 6.5

Рис. 6.6

Вокруг нас много красивых симметричных архитектурных сооружений (зданий). На рис. 6.5 изображён храм Геры в Пестуме (Италия), построенный во второй четверти V века до нашей эры. В повседневной жизни мы встречаем различные симметричные детали и инструменты (рис. 6.6).

На рис. 6.7 изображены два Буратино, симметричных друг другу относительно центра (точки O). Мы видим, что они состоят из симметричных точек: кончики носов, концы мизинцев и т.д. Буратино на рис. 6.7 не являются плоскими, мы будем говорить о симметрии фигур, расположенных в пространстве.

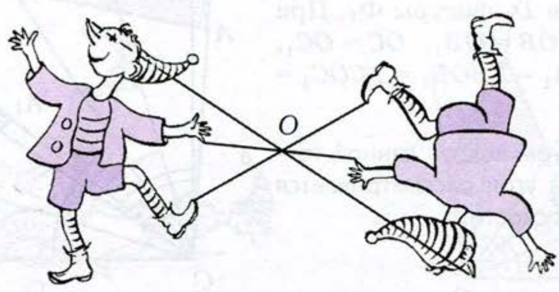


Рис. 6.7

Дадим определение *точек, симметричных друг другу относительно центра симметрии.*

Определение 31. Две точки A и A_1 в пространстве называются симметричными друг другу относительно точки O, если точка O — середина отрезка AA_1. Точка O называется центром симметрии точек A и A_1. Точка O считается симметричной самой себе.

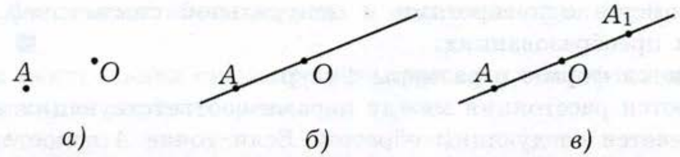


Рис. 6.8

Научимся строить точки, симметричные друг другу относительно данного центра симметрии.

На рис. 6.8а нам даны точка A и центр симметрии — точка O.

Для построения точки, симметричной точке A относительно точки O, нужно выполнить следующие построения:

1. Через точки O и A провести прямую OA (рис. 6.8б).

2. От точки O на луче, дополнительном к лучу OA, отложить отрезок OA_1, равный отрезку AO (рис. 6.8в).

В результате этих построений мы получим точку A_1, симметричную точке A относительно центра O.

С помощью этого правила можно для каждой точки пространства построить симметричную ей точку относительно некоторого центра.

Можно дать такое определение *центральной симметрии.*

Определение 32. Центральной симметрией с центром в точке O называется такое преобразование, при котором каждая точка пространства переходит в симметричную ей относительно точки O точку. Точка O называется центром симметрии.

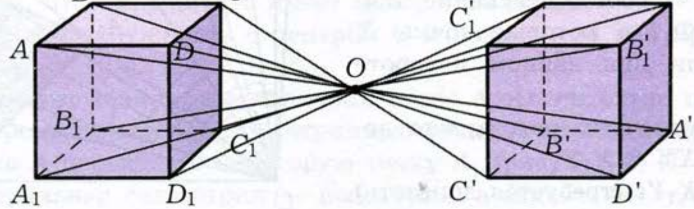


Рис. 6.9

Фигура, в которую при центральной симметрии переходит данная фигура, называется *фигурой, симметричной данной относительно центра симметрии*.

На рис. 6.9 изображены два куба, симметричных друг другу относительно точки O. Центральную симметрию с центром O обозначают Z_O.

Сравнивая понятия поворота и центральной симметрии, можно сделать вывод о том, что центральная симметрия на плоскости есть поворот на 180°.

При знакомстве с поворотами и центральной симметрией мы видим, что при этих преобразованиях:

- сохраняются формы и размеры фигур;
- сохраняются расстояния между парами соответствующих точек.

Это понимается следующим образом. Если точке A сопоставляется (соответствует) точка A_1, а точке B — точка B_1, то $AB = A_1B_1$.

Определение 33. Геометрические преобразования, сохраняющие расстояния между парами соответствующих точек, называются изометриями.

Позднее мы введём понятие равенства фигур и сможем доказать, что при изометрии фигура переходит в равную ей фигуру.

Докажем теорему.

Теорема 7. Поворот фигуры Ф на плоскости вокруг центра O на угол α является изометрией.

Доказательство

1. Фигура Ф переходит в фигуру $Ф_1$ при повороте вокруг точки O на угол α (дано) (рис. 6.10).

2. Поворот вокруг точки O на угол α является изометрией (требуется доказать).

Прежде всего нам нужно понять, что означает пункт 2.

Пусть X и Y — точки фигуры Ф, а X_1 и Y_1 — соответствующие точки фигуры $Ф_1$, в которые точки X и Y перешли при данном повороте (рис. 6.10).

Пункт 2 означает: нам нужно доказать, что $XY = X_1Y_1$.

3. $XY = X_1Y_1$ (требуется доказать) (рис. 6.10).

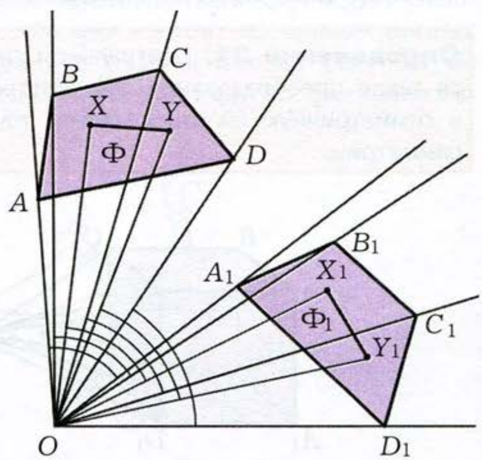


Рис. 6.10

Для доказательства этого равенства достаточно доказать равенство двух треугольников XYO и X_1Y_1O, у которых XY и X_1Y_1 являются сторонами.

4. $OX = OX_1$, $OY = OY_1$ (1, определение поворота).

5. $\angle XOX_1 = \angle YOY_1 = \alpha$ (1, определение поворота).

6. $\angle XOY = \angle X_1OY_1$ (1, 5, свойство измерения углов).

7. $\triangle XOY = \triangle X_1OY_1$ (4, 6, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

8(3). $XY = X_1Y_1$ (7).

9(2). Поворот вокруг точки на угол α есть изометрия (1, 3, определение изометрии). ■

Так как центральная симметрия на плоскости является частным случаем поворота, то верна теорема:

Теорема 8. Центральная симметрия на плоскости является изометрией.

§ 6.3 ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

В предыдущем разделе мы рассматривали различные фигуры, симметричные друг другу относительно некоторого центра. Однако возможен случай, когда фигура, симметричная данной фигуре относительно некоторого центра, совпадает с данной фигурой. Такая фигура называется *центрально-симметричной*. Говорят также, что такая фигура имеет центр симметрии. Центрально-симметричными фигурами являются, например, окружность, сфера, квадрат, куб (рис. 6.11).

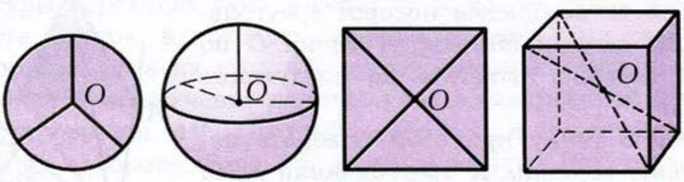


Рис. 6.11

Докажем, что окружность имеет центр симметрии.

1. Построим окружность с центром O и возьмём на ней произвольную точку A (рис. 6.12а).

2. Где лежит точка, симметричная точке A относительно центра O?

3. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно центра O.

4. Точка A перейдёт в некоторую точку A_1 (рис. 6.12б) (1, 3).

5. Центральная симметрия — изометрия, а значит, $OA = OA_1$ (1, 3, 4, свойство центральной симметрии).

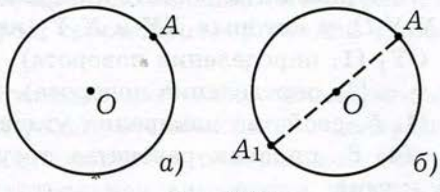


Рис. 6.12

6. По определению окружности точки A и A_1 принадлежат ей (рис. 6.12б) (1, 5, определение окружности).

7(2). Таким образом, точка, симметричная точке данной окружности, принадлежит этой же окружности. ■

Мы доказали теорему.

Теорема 9. Окружность симметрична относительно своего центра.

Попробуйте самостоятельно доказать, что сфера имеет центр симметрии.

Развиваем умения

К § 6.1

Н ⇓

1 ● На рис. 6.13 изображён поворот треугольника ABC на угол 50° вокруг точки O по часовой стрелке. Ответьте на следующие вопросы:

а) В какую точку при этом повороте переходят: вершина A треугольника ABC, вершина B, вершина C?

б) В какой отрезок переходят при этом повороте: сторона AB треугольника ABC, сторона BC, сторона CA?

в) В какую фигуру при повороте переходят: угол ABC, угол BCA, угол CAB?

г) В какую фигуру при повороте переходит треугольник ABC?

д) Назовите расстояния, которые сохраняются при данном повороте.

е) Какая точка при данном повороте остаётся на месте?

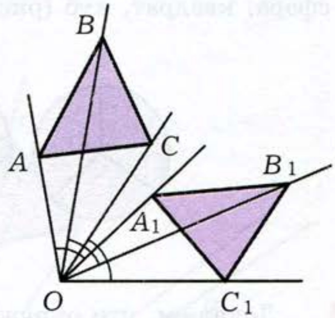


Рис. 6.13

Н ⇑

2 Есть ли у поворота: а) точки, переходящие в себя; б) прямые, переходящие в себя?

3 Однозначно ли высказывание: «Поворот выполнен вокруг центра O на угол 45°»? Какие возможны повороты вокруг точки O на этот угол?

Н

4 Даны две концентрические, т.е. с общим центром, окружности: окр. (O, r_1) и окр. (O, r_2). С помощью лучей с началом в точке O задайте преобразование одной окружности на другую. Сохраняет ли это преобразование расстояния между парами соответствующих точек?

5 В какую фигуру переходит прямая при повороте на некоторый угол вокруг точки O?

6 В какую фигуру переходит окружность (круг) при повороте вокруг точки A на угол 25°? Отдельно рассмотрите случай, когда центр поворота — точка A — совпадает с центром окружности (круга).

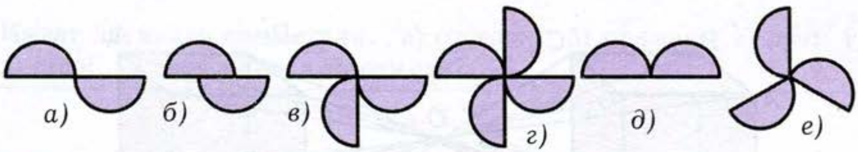


Рис. 6.14

7 На рис. 6.14 изображены различные фигуры, состоящие из одинаковых полукругов. В каждом ли случае существует поворот, при котором данные фигуры переходят сами в себя? Если да, то какой именно?

8 Постройте фигуру, в которую перейдёт прямой угол при повороте вокруг вершины угла на угол 45° против часовой стрелки. Заштрихуйте объединение и пересечение данного угла и построенной фигуры.

9 Нарисуйте отрезок AB. Постройте фигуру, в которую перейдёт этот отрезок при повороте: а) вокруг точки A на угол 120° по часовой стрелке; б) вокруг точки B на угол 60° против часовой стрелки; в) вокруг середины отрезка на угол 45° по часовой стрелке.

П

10 Нарисуйте квадрат $ABCD$. Постройте фигуру, в которую перейдёт этот квадрат при повороте по часовой стрелке: а) вокруг точки A на угол 135°; б) вокруг точки B на угол 90°; в) вокруг точки C на угол 45°; г) вокруг точки D на угол 30°; д) вокруг центра квадрата на угол 45°. Для случаев в), г), д) найдите объединение исходного квадрата и полученной фигуры.

М

11 Сколько существует поворотов, переводящих: а) точку в точку; б) окружность в равную ей окружность; в) отрезок в отрезок?

Проект «Изготовление снежинок из бумаги»

Почти все снежинки, встречающиеся в природе, при повороте на 60° вокруг некоторой точки переходят в себя. Придумайте, как вырезать из листа бумаги фигуры, переходящие сами в себя при повороте на 60°. Вырежьте несколько снежинок. Проведите конкурс на самую красивую снежинку.

К § 6.2–6.3

Н ⇓

12 • На рис. 6.15 изображены два симметричных друг другу относительно некоторой точки куба. Ответьте на следующие вопросы:

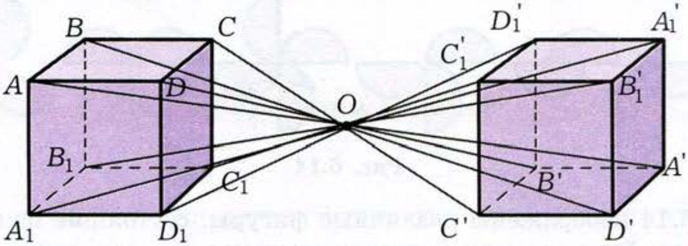


Рис. 6.15

а) Назовите точку, которая является центром симметрии.

б) В какие точки перейдут при этой симметрии вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

в) Какие точки симметричны вершинам A'_1 и D'_1 куба $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$?

г) Назовите несколько пар равных отрезков на этом рисунке.

д) Назовите несколько пар равных фигур на этом рисунке.

13 • Приведите примеры фигур, имеющих центр симметрии.

14 • Какие расстояния сохраняются при изометрии?

Н ⇑

15 • Какая точка при центральной симметрии переходит сама в себя?

16 • Какие прямые при центральной симметрии переходят в себя?

17 Как найти центр симметрии, если центральная симметрия задана парой соответствующих точек A и A_1?

18 В какую фигуру при центральной симметрии с центром B переходит угол ABC?

19 В какую фигуру переходит окружность при симметрии относительно её центра?

20 Какие из фигур на рис. 6.16 имеют центр симметрии? При повороте на какой угол эти фигуры переходят в себя?

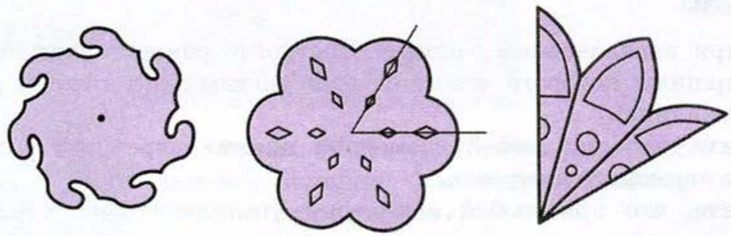


Рис. 6.16

21 Имеет ли центр симметрии: а) отрезок; б) прямая; в) луч; г) куб; д) шар; е) треугольная пирамида?

Н

22 Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно данного центра O. Что можно сказать об этих отрезках?

23 Постройте прямую, симметричную данной прямой AB относительно данного центра O (точка O принадлежит прямой AB).

П

24 Дана окружность с центром в точке O и радиусом r. В какую фигуру перейдёт эта окружность при симметрии: а) относительно точки O; б) относительно точки M, принадлежащей окружности; в) относительно середины отрезка OM?

25 Существуют ли фигуры, имеющие несколько центров симметрии?

М

26 Постройте треугольник, центрально-симметричный равностороннему треугольнику относительно его центра. Пусть сторона данного треугольника равна 1. Вычислите периметр объединения и пересечения исходного и полученного треугольников.

27 Нарисуйте тетраэдр. Постройте фигуру, в которую перейдёт этот тетраэдр в результате центральной симметрии. Рассмотрите различные случаи расположения центра симметрии.

28 Известно, что наименьший угол поворота, при котором фигура переходит в себя, равен $n°$. Докажите, что число $\frac{360}{n}$ — целое.

M

29 Даны три параллельные прямые. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на этих прямых (на каждой прямой по одной вершине).

30 Докажите, что при любой изометрии прямая переходит в прямую, а отрезок переходит в отрезок.

31 Докажите, что при любой изометрии угол переходит в равный ему угол.

Проект «Изготовление центрально-симметричных фигур из бумаги»

Придумайте, как вырезать из листа бумаги центрально-симметричные фигуры. Вырежьте несколько фигур, которые кажутся вам особенно красивыми. Проведите конкурс на самую красивую фигуру.

РАЗДЕЛ 3

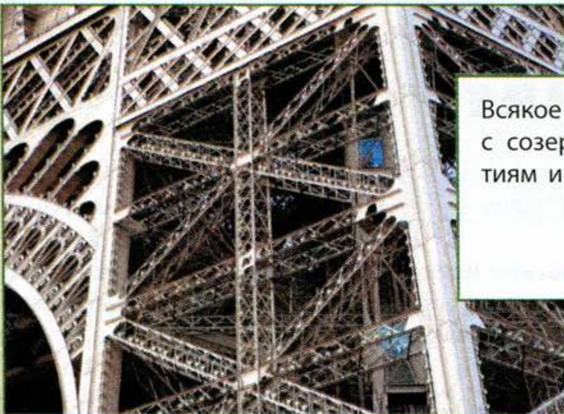
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Как прекрасно почувствовать целостность комплекса явлений, которые при непосредственном восприятии казались разрозненными.

Альберт Эйнштейн
(немецкий физик-теоретик, 1879–1955)

Глава 7

ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ



Всякое человеческое познание начинает с созерцаний, переходит от них к понятиям и заканчивает идеями.

Иммануил Кант
(немецкий философ, 1724–1804)

Открываем новые знания

§ 7.1 ПОНЯТИЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

В этой главе мы познакомимся подробнее с основными случаями *взаимного расположения прямых*. Начнём с изучения некоторых свойств *пересекающихся прямых*.

На рис. 7.1 изображены две прямые a и b, которые имеют только одну общую точку.

Определение 34. Если две прямые имеют только одну общую точку, то они называются пересекающимися.

Две пересекающиеся прямые всегда лежат в одной плоскости. Попробуйте доказать этот факт самостоятельно.

На рис. 7.2 мы продлили в обе стороны все рёбра куба и получили 12 прямых. Обратите внимание на то, что в каждой вершине пересекаются три такие прямые.

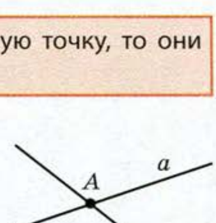


Рис. 7.1

На рис. 7.3 изображены две пересекающиеся в точке O прямые AB и CD. При пересечении этих прямых образуются различные углы. У углов 1 и 3 и углов 2 и 4 стороны являются дополнительными лучами.

Эти углы называются *вертикальными углами*.

Определение 35. Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла.

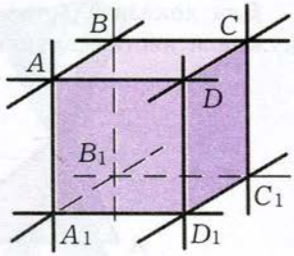


Рис. 7.2

На рис. 7.3 мы видим две пары вертикальных углов: $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$.

Если мы измерим величины вертикальных углов, то придём к следующему выводу: вертикальные углы равны.

Теорема 10. Вертикальные углы равны.

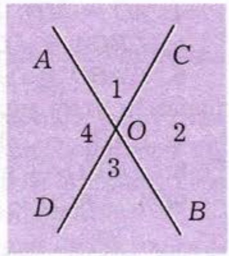


Рис. 7.3

Доказательство

На рис. 7.3 изображены две пары вертикальных углов. Докажем, например, что $\angle 1 = \angle 3$.

1. $\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные (дано) (рис. 7.3).
2. $\angle 1 = \angle 3$ (требуется доказать).

Из п. 1 можно получить такие следствия:

3. Лучи OA и OB, OC и OD — дополнительные (1, определение вертикальных углов).
4. $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 2$ и $\angle 3$ — смежные углы (3, определение смежных углов).
5. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (4, свойство смежных углов).

Для доказательства п. 2 можно воспользоваться равенствами в п. 5 доказательства.

6. $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$ (5).

В равенство 6 входит один и тот же угол: $\angle 2$. Вычтем его из обеих частей равенства.

7(2). $\angle 1 = \angle 3$ (6). ■

Используя свойства вертикальных углов, можно доказать *теорему о свойствах внешних углов треугольника*:

Теорема 11. Внешний угол треугольника больше любого его внутреннего угла, не смежного с ним.

Доказательство

1. $\triangle ABC$, $\angle BCD$ — его внешний угол (дано) (рис. 7.4а).
2. $\angle BCD > \angle B$ (требуется доказать).

Для доказательства п. 2 нужно применить уже имеющиеся знания, но нужна и нестандартная идея, которая видна из рис. 7.4б.

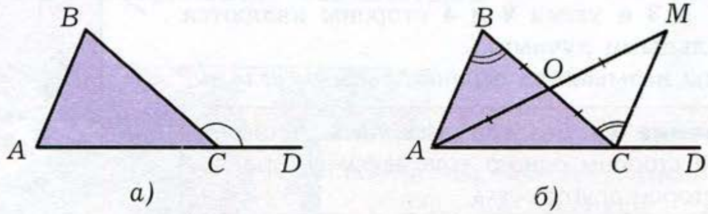


Рис. 7.4

3. Построим точку O — середину стороны BC и построим на продолжении отрезка AO отрезок OM, равный AO (построение) (рис. 7.4б).

Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle MCO$ и докажем их равенство.

4. $AO = MO$, $BO = CO$ (3).

5. $\angle BOA = \angle COM$ (3, теорема о равенстве вертикальных углов).

6. $\triangle ABO = \triangle MCO$ (4, 5, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

7. $\angle ABC = \angle MCO$ (6, определение равных треугольников).

8. $\angle MCO$ — часть внешнего угла BCD.

9(2). $\angle BCD > \angle B$ (8). ■

§ 7.2 КОНУС. РАЗВЁРТКА КОНУСА

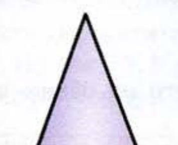


Рис. 7.5

Рис. 7.6

На рис. 7.5 изображена очень распространённая геометрическая фигура — *конус*. Форму конуса имеют различные сосуды, крыши башен крепостей и за́мков (рис. 7.6).

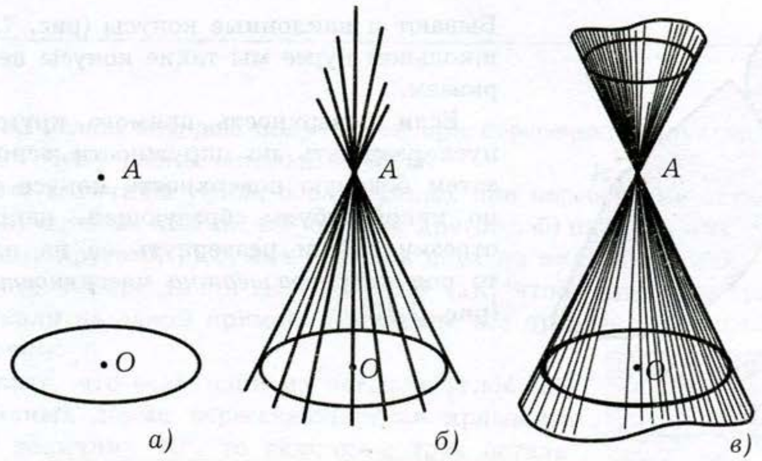


Рис. 7.7

Пусть нам дана окружность с центром в точке O и радиусом r и точка A, не принадлежащая плоскости этой окружности (рис. 7.7а).

Проведём прямые через точку A и каждую точку данной окружности (рис. 7.7б). Мы получим поверхность, которую называют *круговой конической поверхностью* (рис. 7.7в). Окружность с центром в точке O и радиусом r называется *направляющей конической поверхности*.

Пересечём коническую поверхность плоскостью α, содержащей указанную выше данную окружность с центром в точке O (рис. 7.8а).

Фигура, ограниченная кругом с центром в точке O и частью конической поверхности, называется *конусом* (рис. 7.8б).

Круг с центром O называется *основанием конуса*, отрезок AB и другие отрезки, из которых построена поверхность конуса, называются *образующими конуса*. Точка A называется *вершиной конуса* (рис. 7.8б).

Если к вершине конуса подвесить отвес, то в случае, когда этот отвес попадёт в центр основания, мы получим *прямой круговой конус* (рис. 7.9а).

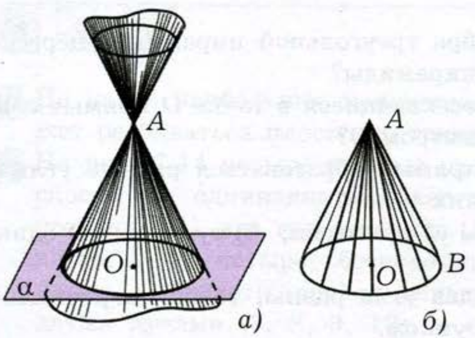


Рис. 7.8

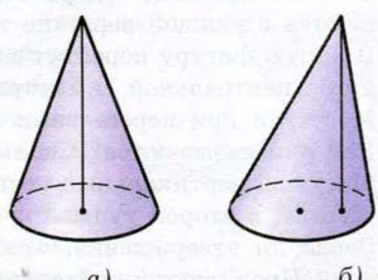


Рис. 7.9

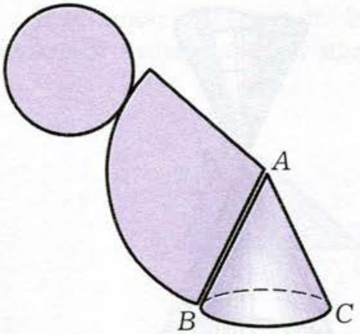


Рис. 7.10

Бывают и наклонные конусы (рис. 7.9б), но в школьном курсе мы такие конусы не рассматриваем.

Если поверхность прямого кругового конуса разрезать по окружности основания, а затем боковую поверхность конуса разрезать по какой-нибудь образующей, например по отрезку AB, и развернуть её на плоскости, то получится *развёртка поверхности конуса* (рис. 7.10).

Развиваем умения

К § 7.1

Н ⇓

1 Прямые a и b пересекаются. Сколько у них общих точек?

2 Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Сколько прямых, содержащих рёбра пирамиды, можно назвать? Сколько таких прямых пересекается в каждой вершине пирамиды?

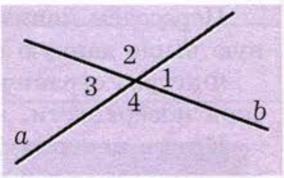


Рис. 7.11

3 Сколько различных углов, меньших 180°, образуется при пересечении двух прямых? Какими свойствами обладают эти углы?

4 Сколько пар вертикальных углов и сколько пар смежных углов изображено на рис. 7.11?

Н ⇑

5 Сколько прямых, содержащих рёбра треугольной пирамиды, пересекаются в каждой вершине такой пирамиды?

6 В какую фигуру перейдут две пересекающиеся в точке O прямые a и b при центральной симметрии с центром O?

7 Могут ли при пересечении двух прямых образоваться равные углы? Как они называются? Сколько таких углов?

8 Могут ли вертикальные углы быть: а) прямыми; б) тупыми; в) один острым, а второй тупым?

9 Верно ли утверждение, что если два угла равны, то они вертикальные? Проиллюстрируйте ответ рисунком.

Н

10 Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?

11 Найдите величины углов, образованных при пересечении двух прямых, если: а) один из них на 20° больше другого; б) один из них составляет половину другого; в) сумма величин двух из них равна 100°.

12 Отметьте четыре точки A, B, C и D так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Проведите все прямые, проходящие через эти точки.

13 Докажите, что если один из четырёх углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, имеет величину 90°, то величины трёх остальных углов также равны 90°.

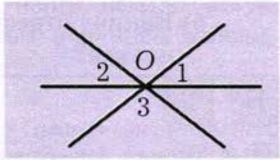


Рис. 7.12

14 На рис. 7.12 три прямые пересекаются в точке O. Найдите сумму углов $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

15 На рис. 7.13 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

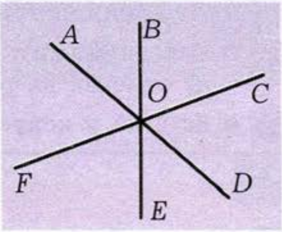


Рис. 7.13

16 Прямая AB пересекает прямую AC в точке A, прямую BC — в точке B. Принадлежит ли точка C прямой AB?

17 Дана прямая a. Отметьте такие точки A, B и C, чтобы прямые AB и a пересекались в точке C, лежащей между точками A и B.

П

18 Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

М

19 На какое наибольшее количество частей может разбиваться плоскость тремя прямыми?

20 На рис. 7.14 четыре прямые разбивают плоскость на одиннадцать областей: четырёхугольник (1), два треугольника (2, 3), три угла (4, 5, 6), четыре «бесконечных треугольника» — области, ограниченные отрезком и двумя лучами (7, 8, 9, 10), и «бесконечный четырёхугольник» — область, ограниченную двумя отрезками и двумя лучами (11). Так

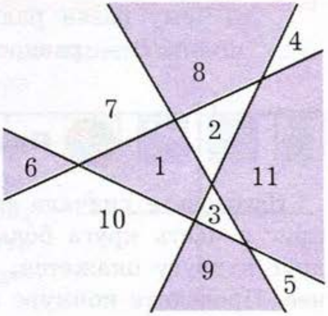


Рис. 7.14

ли разбивают плоскость любые четыре прямые, если среди них нет параллельных прямых и прямых, проходящих через одну точку?

К § 7.2

Н ⇓

21 На рис. 7.15 изображён прямой круговой конус с вершиной в точке B.

а) Какая фигура является основанием конуса?

б) Какие отрезки являются образующими конуса?

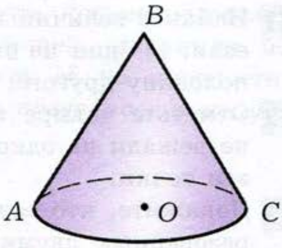


Рис. 7.15

Н ⇑

22 Может ли образующая конуса равняться радиусу окружности основания? Обоснуйте свой ответ.

23 Из каких фигур состоит развёртка конуса?

24 Как определить центр основания прямого кругового конуса, если он не отмечен на рисунке?

25 Есть ли у конуса центр симметрии?

Н

26 На рис. 7.16 изображён прямой круговой конус. Прямая, проходящая через вершину конуса (точку O) и центр основания (точку C), называется осью конуса. Сечение OAB назвают осевым сечением конуса. Ответьте на вопросы:

а) Какой фигурой в данном случае может быть осевое сечение конуса?

б) Какой фигурой является это сечение, если $OA = AB$?

в) Чему равен радиус основания конуса, если $\triangle AOB$ — равносторонний со стороной a?

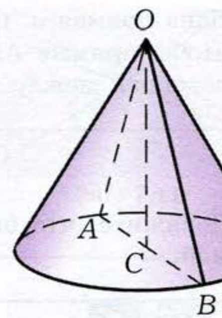


Рис. 7.16

Проект «Изготовление конуса из бумаги»

Изготовьте сначала развёртку конуса. Для этого вырежьте из бумаги круг и часть круга бо́льшего радиуса. Если в процессе приклеивания их друг к другу окажется, что часть круга слишком велика, отрежьте лишнее. Проведите конкурс на лучший изготовленный конус.

Глава 8

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Если отойти от привычного представления о симметрии как свойстве, непременно связанном с нашим внешним обликом, то можно найти немало фигур, симметричных в том или ином отношении.

Александр Соломонович Компанеец
(русский физик, 1914–1974)

Открываем новые знания

§ 8.1 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ

При пересечении двух прямых есть очень важный случай: прямые, пересекаясь, образуют прямые углы (рис. 8.1).

Определение 36. Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Перпендикулярность прямых обозначается специальным знаком «$\perp$». Запись «$a \perp b$» читается: «прямая a перпендикулярна прямой b», или «прямые a и b перпендикулярны».

Кроме понятия перпендикулярности прямых, в геометрии используют понятие *перпендикуляра к прямой*. Говорят: «провести перпендикуляр к прямой, проходящий через данную точку», или «опустить перпендикуляр из точки на прямую». Дадим определение этому понятию.

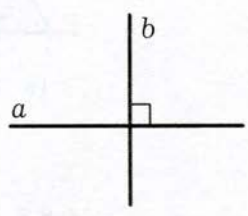


Рис. 8.1

Определение 37. Перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой a, называется отрезок прямой, перпендикулярной к прямой a, с концами в точках A и B, где A — точка, из которой проводится перпендикуляр, B — точка пересечения прямой a с перпендикулярной ей прямой AB.

На рис. 8.2 прямая AB перпендикулярна к прямой a, отрезок AB является перпендикуляром к прямой a. Точка B называется *основанием перпендикуляра AB*.

Иногда перпендикуляром к прямой a называют также прямую, перпендикулярную к прямой a. Это можно делать только в таких ситуациях, где не возникает недоразумений.

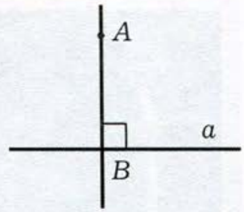


Рис. 8.2

§ 8.2 ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ

Нам нужно научиться строить перпендикулярные прямые или перпендикуляр к прямой.

Точка O, через которую проводят перпендикуляр к данной прямой a, может быть расположена по-разному:

Рис. 8.3

а) точка O лежит на данной прямой a (рис. 8.3);

б) точка O не лежит на данной прямой a (рис. 8.4).

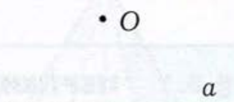


Рис. 8.4

Начнём с построений перпендикулярных прямых с помощью инструментов, которыми пользуются на практике.

Есть широко известный способ проведения перпендикуляра к прямой с использованием угольника и линейки. С помощью этих инструментов можно провести перпендикуляр через точку O, лежащую на прямой a (рис. 8.5а) или не лежащую на ней (рис. 8.5б).

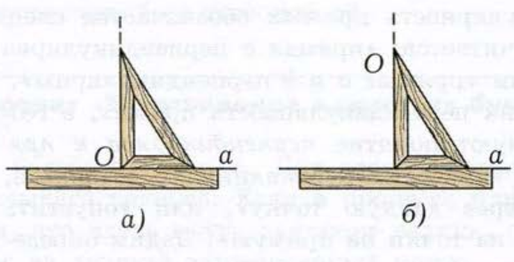


Рис. 8.5

Ответим на такой вопрос:

? Есть ли разница в построении перпендикуляра к данной прямой с помощью угольника и линейки на плоскости (на листе бумаги или на доске) и в пространстве?

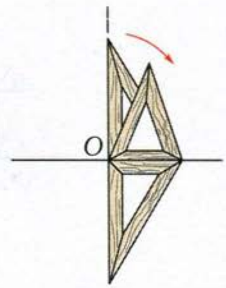


Рис. 8.6

Пусть точка O лежит на прямой a (рис. 8.6). Представьте себе, что мы прикладываем к прямой a угольник. В пространстве угольник может «крутиться вокруг прямой» как угодно и занимать бесчисленное множество различных положений (рис. 8.6).

Таким образом,

! В пространстве через точку, принадлежащую данной прямой, мы можем провести сколько угодно перпендикуляров к этой прямой, проходящих через эту точку.

Если точка O не лежит на прямой a (рис. 8.4), то через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и в ней можно построить перпендикуляр к данной прямой.

Построим перпендикулярные прямые при помощи циркуля и линейки. Это построение проводится в некоторой плоскости.

Задача 1

Через данную точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.

Решение

Первый случай. Дана прямая a и точка O на ней (рис. 8.7а).

Анализ. Предположим, что мы построили прямую l, перпендикулярную прямой a (рис. 8.7б). Как её построить с помощью циркуля и линейки? Идея решения (построения) состоит в построении равных треугольников AOB и AOC, у которых углы AOB и AOC смежные и равные, а значит, прямые (рис. 8.7в).

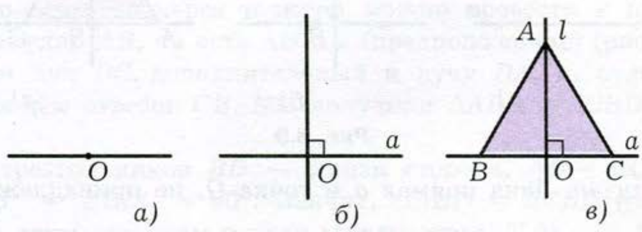


Рис. 8.7

Построение:

1. Нам дана прямая a и точка O, $O \in a$ (дано) (рис. 8.8а).

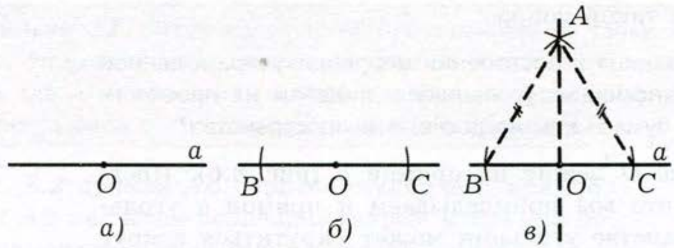


Рис. 8.8

2. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в точке O. Она пересекает прямую a в двух точках B и C (рис. 8.8б).

Мы получили по две вершины нужных нам треугольников: B и O, C и O.

3. Из точек B и C, как из центров, проводим окружности с радиусом BC. Пусть A — точка их пересечения (рис. 8.8в).

Мы получили третью вершину нужных нам треугольников — A.

4. Искомая прямая проходит через точки O и A, $OA \perp a$.

Доказательство

Нам нужно доказать равенство треугольников AOB и AOC.

1. AO — общая сторона треугольников AOB и AOC.
2. $BO = CO$ (п. 2 построения, определение окружности).
3. $AB = AC$ (п. 3 построения, определение окружности).
4. $\triangle AOB = \triangle AOC$ (1, 2, 3, признак равенства треугольников по трём сторонам).
5. $\angle AOB = \angle AOC = 90°$ (4, свойство смежных углов).
6. $AO \perp BC$ (5, определение перпендикулярных прямых). ■

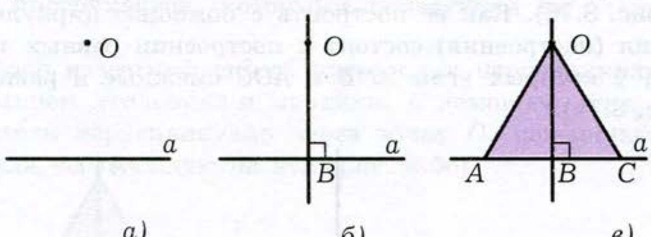


Рис. 8.9

Второй случай. Дана прямая a и точка O, не принадлежащая прямой a (рис. 8.9а).

Анализ. Предположим, что задача решена и перпендикуляр OB построен (рис. 8.9б). Как это можно сделать с помощью циркуля и линейки?

Как и в первом случае, нам нужно построить два равных треугольника OBA и OBC (рис. 8.9в).

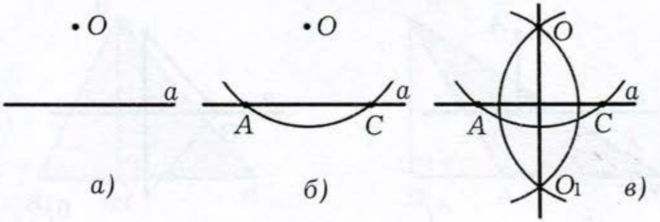


Рис. 8.10

Построение:

1. Нам даны прямая a и точка O, $O \notin a$ (рис. 8.10а).

Мы уже знаем, что прямая и не принадлежащая этой прямой точка определяют некоторую плоскость, в ней мы и будем выполнять построения.

Для получения вершин A и C нужных нам треугольников выполним следующее построение.

2. Из точки O проведём окружность, пересекающую прямую a в точках A и C (рис. 8.10б).

Для построения других вершин искомых треугольников:

3. Проведём две окружности с центрами в точках A и C и радиусом AO. Они пересекаются в точках O и O_1 (рис. 8.10в).

4. Соединим точки O и O_1. $OO_1 \perp a$.

Доказательство проведите самостоятельно. ■

Теперь докажем, что такой перпендикуляр можно построить только один.

Теорема 12 (о единственности перпендикуляра). Из любой точки, лежащей вне прямой, можно провести только один перпендикуляр к этой прямой.

Доказательство

1. Нам даны прямая a, точка A, $A \notin a$, $AD \perp a$ (дано) (рис. 8.11а).

2. Из точки A можно провести единственный перпендикуляр к прямой a (требуется доказать).

3. Предположим, что через точку A можно провести к прямой a ещё один перпендикуляр AB, то есть $AB \perp a$ (предположение) (рис. 8.11б).

4. Проведём луч DC, дополнительный к лучу DA, и, отложив на нём $DC = DA$, проведём отрезок CB. Мы получили $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ (построение) (рис. 8.11б).

5. У этих треугольников BD — общая сторона, $AD = DC$ (по построению), $\angle ADB = \angle BDC = 90°$. Значит, $\triangle ABD = \triangle CBD$ (равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними, Т.5).

6. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABD = \angle DBC$. Так как по предположению $AB \perp a$, то угол ABD — прямой, тогда равный ему угол DBC также прямой.

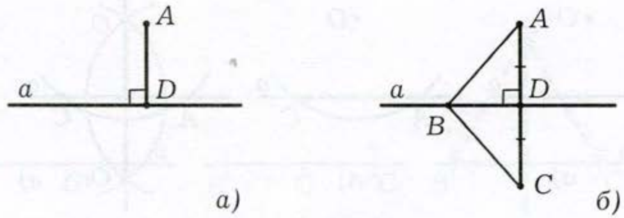


Рис. 8.11

7. Получили, что угол ABC — развёрнутый, то есть лучи BA и BC составляют прямую. В таком случае через две точки A и C проходят две различные прямые, что противоречит аксиоме прямой (определение развёрнутого угла, аксиома прямой А.1).

8(2). Наше предположение о том, что из точки A к прямой a можно провести два перпендикуляра, неверно. Из точки A можно провести единственный перпендикуляр к прямой a (что и требовалось доказать). ■

§ 8.3 ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

Перпендикулярность прямых используется при изучении свойств треугольников.

Катеты прямоугольного треугольника взаимно перпендикулярны.

На рис. 8.12 изображён прямоугольный треугольник ABC. Угол C — прямой, катеты AC и BC перпендикулярны: $AC \perp BC$.

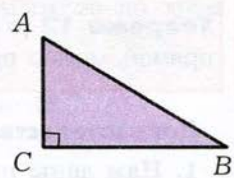


Рис. 8.12

Введём понятие *высоты произвольного треугольника*.

Определение 38. Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

На рис. 8.13 изображены два треугольника, у которых проведены высоты из вершин B. Обратите внимание на то, что *основание высоты* — точка D — может лежать как на стороне AC треугольника (рис. 8.13а), так и на продолжении стороны AC (рис. 8.13б).

? Сколько высот можно провести в каждом треугольнике? Как они расположены?

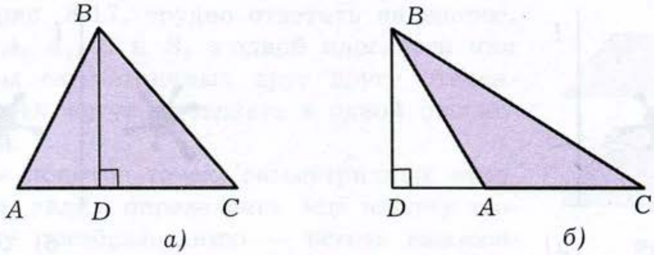


Рис. 8.13

Если треугольник остроугольный, все основания высот принадлежат сторонам треугольника (рис. 8.14а). У тупоугольного треугольника основания двух высот попадают на продолжения сторон (рис. 8.14б).

Попробуйте провести в треугольнике все три его высоты. Вы увидите, что высоты или их продолжения пересекаются в одной точке O (рис. 8.14а). Эта точка называется *ортоцентром треугольника*.

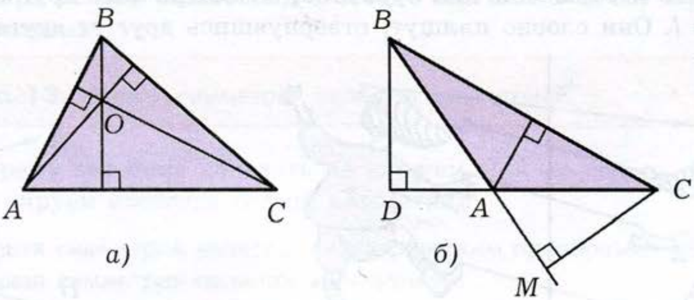


Рис. 8.14

Имеет место следующий важный геометрический факт, который мы сможем доказать позднее:

! Три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

§ 8.4 ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Рассмотрим *фигуры, симметричные друг другу относительно некоторой прямой — оси*.

Изобразим на листе бумаги какую-нибудь фигуру (кляксу), а вне неё проведём произвольную прямую l (рис. 8.15а). Не давая краске высохнуть, перегнём лист бумаги по прямой l так, чтобы одна часть листа наложилась на другую. На второй половине листа (полуплоскости) получился от-

а) б)

Рис. 8.15

печаток нашей кляксы (рис. 8.15б). Мы получили фигуру, симметричную данной относительно прямой l. Об этих двух фигурах говорят также, что *они симметричны друг другу относительно данной прямой — оси* l.

Прямая, относительно которой данные фигуры симметричны, называется *их осью симметрии*.

На рис. 8.16 изображены два Буратино, симметричные друг другу относительно оси l. Они словно пляшут, отвернувшись друг от друга.

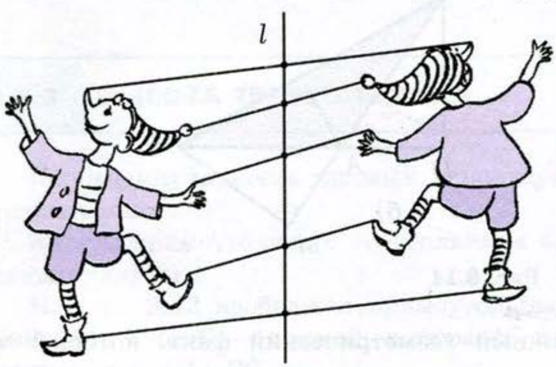


Рис. 8.16

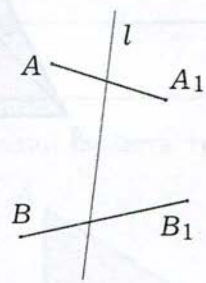


Рис. 8.17

В наших примерах каждой точке одной фигуры ставится в соответствие точка симметричной ей другой фигуры.

Определение 39. Точки A и A_1 называются симметричными относительно некоторой прямой p, если эта прямая p перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину. Прямая p называется осью симметрии точек A и A_1. Каждая точка оси симметрии считается симметричной самой себе.

Изобразим в пространстве несколько пар точек, *симметричных друг другу относительно оси* l. На рис. 8.17 изображены две пары таких точек.

Глядя на рис. 8.17, трудно ответить на вопрос, лежат точки A, A_1, B и B_1 в одной плоскости или нет. Две пары симметричных друг другу относительно оси точек могут не лежать в одной плоскости (рис. 8.18).

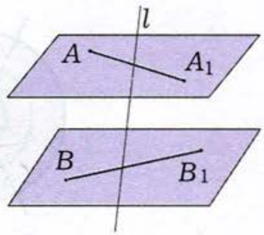


Рис. 8.18

Используя понятие точек, симметричных относительно оси, дадим определение ещё одному геометрическому преобразованию — *осевой симметрии*.

Определение 40. Осевой симметрией с осью l называется такое преобразование, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно оси l точку.

Осевая симметрия с осью l иногда обозначается S_l. Запись $S_l(X) = X_1$ читается: «точка X_1 симметрична точке X относительно прямой l», или «точка X при осевой симметрии с осью l перешла в точку X_1».

Верна теорема:

Теорема 13. Осевая симметрия является изометрией.

Эту теорему мы пока доказать не сможем.

Сформулируем свойства осевой симметрии:

!

1. Осевая симметрия является геометрическим преобразованием.
2. Осевая симметрия является изометрией.
3. Осевая симметрия переводит фигуру в равную ей фигуру.

В дальнейшем нам понадобится такой факт:

Теорема 14. Если две прямые, лежащие в плоскости, перпендикулярны, то при симметрии относительно одной из них вторая прямая переходит сама в себя.

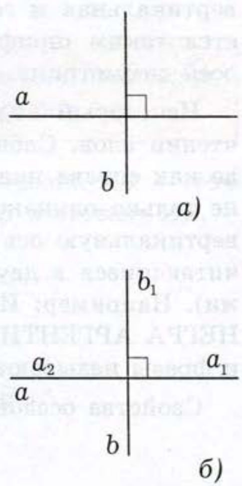
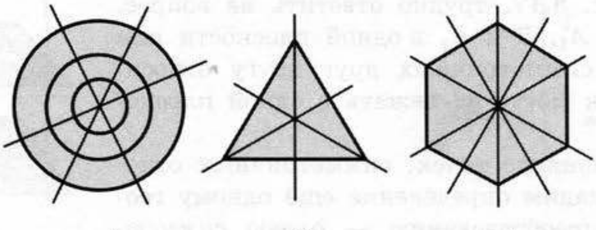


Рис. 8.19

Доказательство

1. Прямые a и b перпендикулярны. $\Big\}$ (дано)
2. Симметрия относительно прямой b. $\Big\}$ (рис. 8.19а)
3. Прямая a при симметрии относительно прямой b переходит сама в себя (требуется доказать).

Из теоремы 13 следует, что при осевой симметрии угол переходит в равный ему угол.



а) б) в)

Рис. 8.20

Рассмотрим любой из углов, образованных при пересечении прямых a и b, например угол со сторонами a_1 и b_1. Этот угол по условию равен 90° (рис. 8.19б).

4. В результате симметрии относительно прямой b этот угол перейдёт в равный ему угол. Но при этом луч b_1 перейдёт сам в себя. Значит, луч a_1 перейдёт в луч a_2 (1, 2, Т.13).

5(3). Прямая a при симметрии относительно прямой b переходит сама в себя (4). ■

Существуют *фигуры, имеющие ось симметрии*, т.е. фигуры, симметричные сами себе относительно некоторой оси как на плоскости (рис. 8.20), так и в пространстве (рис. 8.21).

Осью симметрии обладают некоторые буквы русского алфавита. Буквы **М, П, Т, Ш** имеют только вертикальную ось симметрии, а буквы **З, К, С, Э** — только горизонтальную. У букв **Ж, Н, О, Ф, Х** целых две оси симметрии — вертикальная и горизонтальная. Иногда буква **О** набирается таким шрифтом, что у неё бесконечное количество осей симметрии.

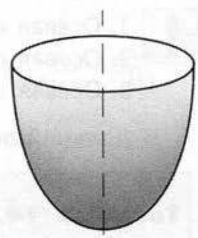


Рис. 8.21

Некоторый вид симметрии можно обнаружить в прочтении слов. Слова ШАЛАШ, КАЗАК читаются одинаково как справа налево, так и слева направо. Слово ПОТОП не только одинаково читается с обеих сторон, но и имеет вертикальную ось симметрии. Можно придумать целые фразы, одинаково читающиеся в двух направлениях (если не считать пробелы между словами). Например: ИСКАТЬ ТАКСИ, АРГЕНТИНА МАНИТ НЕГРА, ЦЕНИТ НЕГРА АРГЕНТИНЕЦ, ЛЁША НА ПОЛКЕ КЛОПА НАШЁЛ. Такие слова и фразы называются *палиндромами*.

Свойства осевой симметрии часто используются при решении задач.

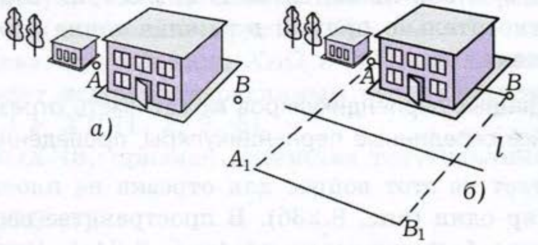


Рис. 8.22

Задача 2

Измерить расстояние между точками A и B, разделёнными зданием (рис. 8.22а).

Решение этой задачи сводится к построению точек A_1 и B_1, симметричных точкам A и B относительно некоторой выбранной оси l (рис. 8.22б).

Объясните, почему длина отрезка A_1B_1 даёт ответ на вопрос задачи.

§ 8.5 ОСИ СИММЕТРИИ ОТРЕЗКА. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

Перейдём к изучению свойств *фигур, имеющих ось (оси) симметрии.*

Рассмотрим оси симметрии отрезка.

Каждый отрезок на плоскости имеет две оси симметрии. Одна из них — прямая, содержащая этот отрезок (рис. 8.23а), а другая — серединный перпендикуляр к отрезку (рис. 8.23б).

Определение 41. Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проведённая через середину этого отрезка перпендикулярно ему.

На рис. 8.23б прямая p проходит через середину отрезка AB — точку K. $AB \perp p$, а значит, p — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

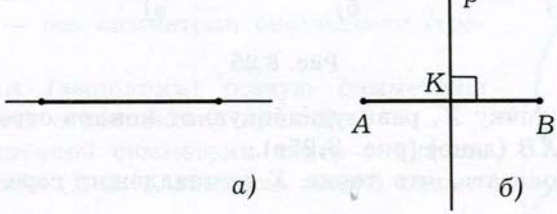


Рис. 8.23

Прямая p на рис. 8.23б является осью симметрии отрезка AB, так как при симметрии относительно прямой p каждая точка отрезка AB перейдёт в точку этого отрезка.

? Сколько серединных перпендикуляров может иметь отрезок AB? Какую фигуру образуют все серединные перпендикуляры, проведённые к отрезку?

Выше мы дали ответ на этот вопрос для отрезка на плоскости — серединный перпендикуляр один (рис. 8.23б). В пространстве серединных перпендикуляров у отрезка бесконечно много (рис. 8.24а). Все серединные перпендикуляры к отрезку в пространстве образуют плоскость (рис. 8.24б).

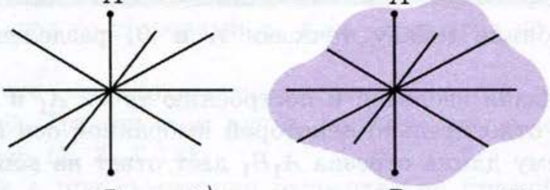


Рис. 8.24

Серединный перпендикуляр к отрезку обладает некоторыми важными свойствами. Рассмотрим два из них.

А. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку.

Доказательство

1. Отрезок AB (дан) (рис. 8.25а).

2. На прямой AB имеется единственная точка O, равноудалённая от точек A и B, — середина отрезка AB (рис. 8.25б). Эта точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB (1).

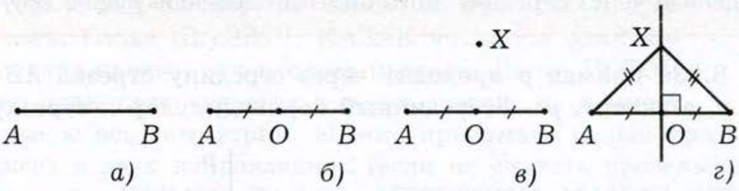


Рис. 8.25

3. Рассмотрим точку X, равноудалённую от концов отрезка AB и отличную от O: $XA = XB$ (дано) (рис. 8.25в).

4. Требуется доказать, что точка X принадлежит серединному перпендикуляру.

5. Проведём прямую XO и докажем, что XO — серединный перпендикуляр к отрезку AB (построение) (рис. 8.25г).

Мы получили два треугольника XAO и XBO. Если мы докажем их равенство, то XO будет искомым серединным перпендикуляром.

6. $AO = OB$, $XA = XB$ (1, 2, 3, 5).

7. $\triangle AOX = \triangle BOX$ (6, признак равенства треугольников по трём сторонам).

8. $\angle XOA = \angle XOB$ (7).

9(4). Прямая OX — ось симметрии точек A и B, то есть OX — серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 8.25г) (4). ■

Сформулируем обратное утверждение:

Б. Если точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, то она равноудалена от его концов.

Проведите доказательство самостоятельно.

Оба предложения А и Б можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 15. Множество всех точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

§ 8.6 ОСИ СИММЕТРИЙ НЕКОТОРЫХ КРУГЛЫХ ФИГУР

Мы уже доказали теорему о том, что окружность симметрична относительно своего центра.

Докажем ещё одно замечательное свойство окружности.

Теорема 16. Окружность симметрична относительно любой прямой, содержащей диаметр окружности.

Доказательство

1. Окружность с центром в точке O.
2. Прямая a содержит диаметр окружности.

$\Big\}$ (дано) (рис. 8.26)

3. Прямая a — ось симметрии окружности (требуется доказать).

4. Рассмотрим (выполним) осевую симметрию данной окружности относительно прямой a.

5. При выполненной симметрии центр окружности перейдёт в себя (1, 2, 4, свойства осевой симметрии).

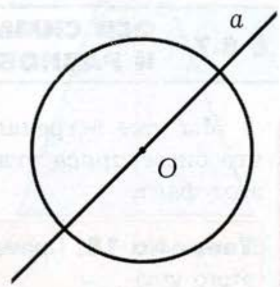


Рис. 8.26

6. Осевая симметрия является изометрией, то есть сохраняет расстояния между парами соответствующих точек. Значит, при этой симметрии любая точка окружности переходит в точку этой же окружности (1, 4, свойства осевой симметрии, определение окружности).

7(3). При осевой симметрии с осью a окружность переходит в себя, то есть она симметрична относительно прямой a (4, 5, 6). ■

Докажем ещё одно свойство окружности.

Теорема 17. Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство

1. Окр. (O, r), AB — хорда окружности.
2. Диаметр окружности MN перпендикулярен хорде AB. } (дано) (рис. 8.27)
3. $AK = KB$ (требуется доказать).
4. Рассмотрим осевую симметрию данной фигуры относительно оси MN.
5. При осевой симметрии относительно прямой MN точка, симметричная точке A, лежит на перпендикуляре к прямой MN, проходящем через A (1, 2, 4, определение осевой симметрии).
6. Точка, симметричная точке A, лежит на данной окружности (1, 2, 4, свойство осевой симметрии).
7. Точкой, симметричной точке A, будет только точка B (2, 4, 5, 6).

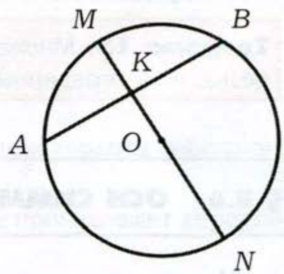


Рис. 8.27

8(3). Диаметр MN делит хорду AB пополам. $AK = BK$ (7, определение симметричных точек). ■

? Будут ли сфера и шар симметричны относительно любой прямой, проходящей через их центр?

Ответ на этот вопрос положительный. Проверьте это самостоятельно.

§ 8.7 ОСИ СИММЕТРИИ УГЛА И РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Мы уже встречались с понятием биссектрисы угла и говорили о том, что биссектриса угла является его осью симметрии. Теперь мы докажем этот факт.

Теорема 18. Прямая, содержащая биссектрису угла, является осью симметрии этого угла.

Доказательство

1. $\angle ABC$ и BM — его биссектриса (дано) (рис. 8.28).

2. Прямая p, содержащая биссектрису BM угла ABC, — ось симметрии угла ABC (требуется доказать).

3. $\angle ABM = \angle CBM$ (1).

4. Рассмотрим осевую симметрию всей фигуры на рис. 8.28 относительно прямой p.

5. При этой симметрии луч BM переходит в себя, а угол ABM — в угол со стороной BM, лежащий в другой полуплоскости относительно прямой p и равный углу ABM (1, 2, 3, свойства осевой симметрии).

6. В полуплоскости с границей BM существует единственный угол со стороной BM, равный данному углу ABM (1, 3, свойства откладывания углов).

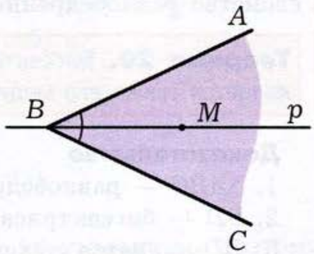


Рис. 8.28

7. Луч BA при выполненной симметрии переходит в луч BC, а луч BC — в луч BA (1, 5).

8(2). Угол ABC при выполненной осевой симметрии переходит в себя (4, 5, 6, 7). ■

Мы много раз говорили о свойствах равнобедренного треугольника. Теперь мы можем несколько углубить наши знания. Сформулируем и докажем теорему, являющуюся следствием теоремы об оси симметрии угла.

Теорема 19. Прямая, содержащая биссектрису угла при вершине равнобедренного треугольника, является осью симметрии этого треугольника.

Доказательство

1. $\triangle ABC$ — равнобедренный, AC — его основание.
2. BM — биссектриса угла при вершине B треугольника ABC.

} (дано) (рис. 8.29)

3. Прямая BM является осью симметрии $\triangle ABC$ (требуется доказать).

4. Выполним осевую симметрию $\triangle ABC$ относительно прямой BM.

5. При этой симметрии луч BM перейдёт в себя, а лучи BC и BA — друг в друга (1, 2, 4, Т.18).

6. $AB = BC$ (1).

7. Точка A перейдёт в точку C, а точка C — в точку A (1, 2, 4, 5, 6, свойства осевой симметрии).

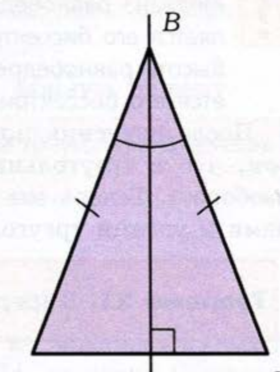


Рис. 8.29

8. Точка B останется на месте (4, определение осевой симметрии).

9. При симметрии относительно оси BM равнобедренный треугольник ABC переходит в себя (7, 8, свойство осевой симметрии).

10(3). Прямая BM является осью симметрии $\triangle ABC$ (9). ■

С помощью теоремы 19 мы можем доказать ещё одно очень важное свойство равнобедренного треугольника.

Теорема 20. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является также его медианой и высотой.

Доказательство

1. $\triangle ABC$ — равнобедренный.
2. BD — биссектриса угла треугольника ABC. $\Big\}$ (дано) (рис. 8.30)
3. BD является медианой и высотой $\triangle ABC$ (требуется доказать).
4. Рассмотрим осевую симметрию $\triangle ABC$ относительно оси BD.
5. Точки A и C симметричны друг другу относительно оси BD (1, 2, 4, Т.19).
6. Точка D перейдёт сама в себя (4, определение осевой симметрии).
7. $AD = CD$ (5, 6, свойство осевой симметрии).

8(3). BD — медиана $\triangle ABC$ (1, 2, 7).

9. $\angle BDA = \angle BDC$ (1, 2, 6, свойства осевой симметрии).
10. $\angle BDA = \angle BDC = 90°$ (9, свойство смежных углов).

11(3). BD — высота $\triangle ABC$ (1, 2, 10). ■

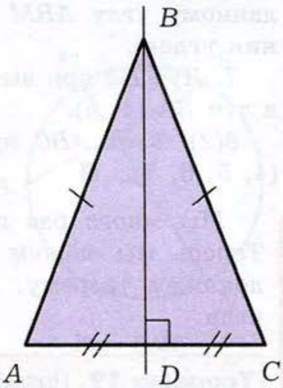


Рис. 8.30

Теорема 20 может быть сформулирована и так:

! Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является его биссектрисой и высотой.

Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является его биссектрисой и медианой.

После изучения понятия равенства треугольников мы сделали вывод о том, что в треугольнике против равных углов лежат равные стороны (и наоборот). Теперь мы можем доказать ещё два соотношения между сторонами и углами треугольника.

Теорема 21. В треугольнике против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол.

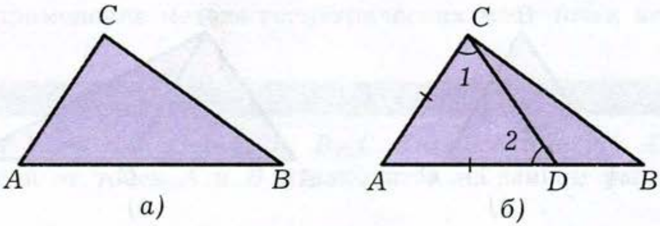


Рис. 8.31

Доказательство

1. $\triangle ABC$.
2. Сторона AB больше стороны AC. } (дано) (рис. 8.31)
3. Угол C больше угла B (требуется доказать).

Мы воспользуемся свойствами равнобедренного треугольника, поэтому построим такой треугольник:

4. Отложим на стороне AB отрезок AD, равный отрезку AC (построение) (рис. 8.31б).
5. $\triangle ACD$ — равнобедренный (1, 4, определение равнобедренного треугольника).
6. $\angle 1 = \angle 2$ (5, свойства равнобедренного треугольника).
7. $\angle 1$ составляет часть $\angle C$, а значит, $\angle C > \angle 1$ (1, 6).
8. $\angle 2$ — внешний угол $\triangle BCD$ (1, 4, определение внешнего угла треугольника).
9. $\angle 2 > \angle B$ (8, свойства внешнего угла треугольника — Т.11).
10(3). $\angle C > \angle B$ (1, 6, 7, 9). ■

Верна и такая теорема:

Теорема 22. В треугольнике против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона.

Докажите эту теорему самостоятельно.

В заключение этого параграфа докажем ещё одну важную теорему:

Теорема 23 (неравенство треугольника). Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Доказательство

1. $\triangle ABC$ (дано) (рис. 8.32а).
2. $AB < BC + CA$ (требуется доказать).

Сравним отрезок с суммой двух других отрезков, не лежащих на одной прямой. Отложим на луче, дополнительном к лучу CA, от точки C отрезок CD, равный BC. Тогда мы будем сравнивать отрезок AB с отрезком AD, равным сумме отрезков AC и BC.

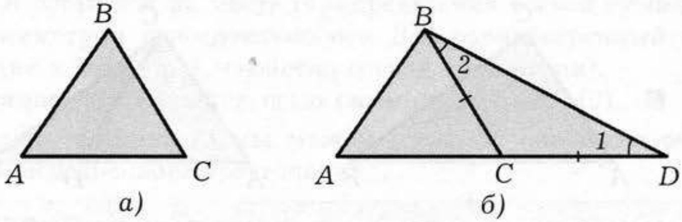


Рис. 8.32

3. Отложим отрезок CD, равный BC (построение) (рис. 8.32б).

4. $\triangle BCD$ — равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$ (3, свойства равнобедренного треугольника).

5. $\angle 2$ составляет часть $\angle ABD$, значит, $\angle 2 < \angle ABD$, и поэтому $\angle 1 < \angle ABD$. Применим к $\triangle ABD$ теорему 22.

6(2). $AB < AD = BC + AC$ (3, 4, свойство сторон и углов треугольника). ■

§ 8.8 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Вспомним свойство серединного перпендикуляра к отрезку, которое сформулировано в теореме 15: *множество всех точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку*, т.е. серединный перпендикуляр — это множество всех точек плоскости, обладающих определённым свойством.

Фигура, которая состоит из всех точек плоскости или пространства, обладающих определённым свойством, называется *геометрическим местом точек*.

Например, окружность можно определить как геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, а сферу — как геометрическое место точек пространства, равноудалённых от данной точки.

Серединный перпендикуляр к отрезку можно также определить как геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от концов этого отрезка.

Геометрические места точек широко используются при решении задач, например задач на построение.

Пусть для решения задачи на построение нам нужно найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, то есть является точкой их пересечения.

Рассмотрим применение метода геометрических мест точек на конкретном примере.

Задача 3

На плоскости даны три точки: A, B, C. Построить точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Решение

1. Нам даны три точки A, B, C (рис. 8.33а).

2. Искомая точка X удовлетворяет двум условиям: а) она одинаково удалена от точек A и B; б) она находится на данном расстоянии от точки C.

3. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB (построение) (рис. 8.33б) (1, Т.15).

4. Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке C (построение) (рис. 8.33в) (1, определение окружности).

5(2). Искомая точка X лежит на пересечении этих геометрических мест. В данном случае искомых точек две: X_1 и X_2 (1, 3, 4, определение геометрического места точек). ■

Исследуйте самостоятельно условия существования различных решений данной задачи.

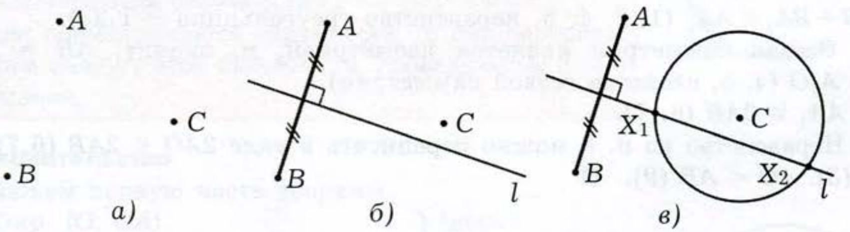


Рис. 8.33

§ 8.9 ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

На рис. 8.34 прямая AO перпендикулярна прямой p, а прямая AB пересекает прямую p и не перпендикулярна прямой p.

Определение 42. Прямая, пересекающая прямую p и не перпендикулярная ей, называется наклонной к прямой p.

На рис. 8.34 прямая AB является наклонной.

Отрезок AB тоже называют наклонной, проведённой из точки A к прямой p.

Введём понятие *проекции точки на прямую*.

Точка O, *лежащая на прямой* p, называется *проекцией точки* A *на прямую* p, *если* $OA \perp p$ (рис. 8.34). Отрезок OB *будет называться проекцией наклонной* AB *на прямую* p.

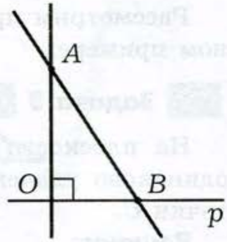


Рис. 8.34

Теорема 24. Расстояние от точки до её проекции на прямую меньше расстояния от этой точки до любой другой точки данной прямой.

Доказательство

$\left.\begin{array}{l}\text{1. } OA \perp a,\ O \text{ — проекция точки } A \text{ на прямую } a. \\ \text{2. } AB \text{ — наклонная к прямой } a.\end{array}\right\}$ (дано) (рис. 8.35а)

3. $AO < AB$ (требуется доказать).

Воспользуемся свойствами осевой симметрии.

4. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой a (построение) (рис. 8.35б).

5. Так как $B \in a$, то точка B при осевой симметрии перейдёт сама в себя (4, свойство осевой симметрии).

6. Используя неравенство треугольника, имеем:
$AB + BA_1 > AA_1$ (1, 2, 4, 5, неравенство треугольника – Т.23).

7. Осевая симметрия является изометрией, и, значит, $AB = A_1B$ и $AO = A_1O$ (4, 5, свойства осевой симметрии).

8. $AA_1 < 2AB$ (6, 7).

9. Неравенство из п. 8 можно переписать в виде $2AO < 2AB$ (6,7).

10(3). $AO < AB$ (9). ■

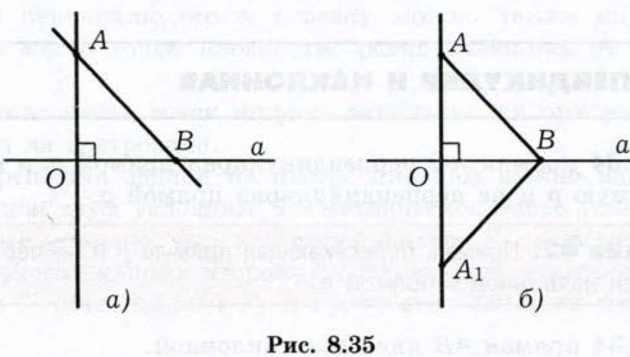


Рис. 8.35

§ 8.10 КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Свойства перпендикуляра и наклонной широко используются при изучении свойств *касательной к окружности*.

Понятие касательной к окружности мы рассматриваем для случая, когда окружность и прямая лежат в одной плоскости.

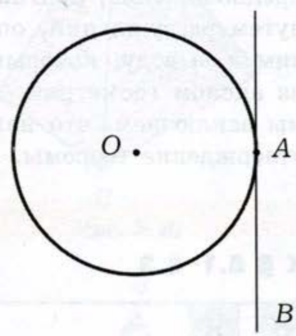


Рис. 8.36

Определение 43. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а общая точка прямой и окружности — точкой касания.

На рис. 8.36 прямая AB является касательной к окружности.

Докажем некоторые свойства касательной к окружности.

Теорема 25.

1) Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через его конец, лежащий на окружности, то она касается этой окружности.

2) Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания.

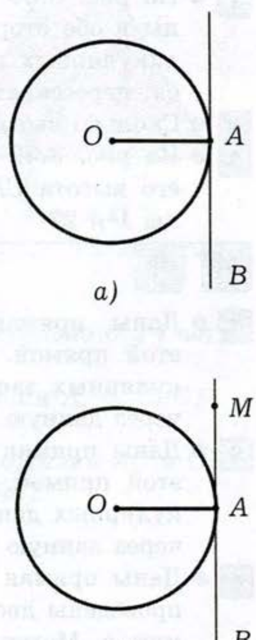


Рис. 8.37

Доказательство

Докажем первую часть теоремы.

1. Окр. (O, OA).
2. $AB \perp OA$, AB проходит через конец радиуса — точку A.

$\Big\}$ (дано) (рис. 8.37а)

3. AB — касательная к окр. (O, OA) (требуется доказать).

Пункт 3 означает, что у прямой AB и окружности должна быть только одна общая точка.

4. Рассмотрим точку M на прямой AB, отличную от точки A (построение) (рис. 8.37б).
5. $OM > OA$, где OA — радиус окружности (4, Т.24).
6. Точка M не принадлежит окр. (O, OA) (5).
7. Прямая OA имеет с окр. (O, OA) только одну общую точку A (6).

8(3). AB — касательная к окр. (O, OA) (7). ■

Вторую часть теоремы докажите самостоятельно. При этом можно воспользоваться широко применяемым в математике *методом доказательства от противного*. Этот метод доказательства состоит в следующем. Например, нам нужно доказать какую-то теорему. Мы формулируем сначала предположение, противоположное тому, что утверждается теоремой. Затем путём рассуждений, опираясь на аксиомы и доказанные теоремы, приходим к выводу, который противоречит либо условию теоремы, либо одной из аксиом геометрии, либо доказанной ранее теореме. На этом основании мы заключаем, что наше предположение было неверным, а значит, верно утверждение теоремы.

Развиваем умения

К § 8.1–8.3

Н ⇓

1 На рис. 8.38 рёбра куба бесконечно продлены в обе стороны. Сколько взаимно перпендикулярных прямых, содержащих рёбра куба, пересекается в каждой вершине куба?

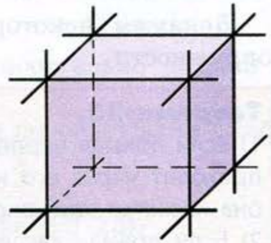


Рис. 8.38

2 Сколько высот имеет каждый треугольник?

3 На рис. 8.39 изображён треугольник ABC и его высота CM. Какую величину имеют углы 1 и 2?

Н ⇑

4 Даны прямая и точка, принадлежащая этой прямой. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через данную точку?

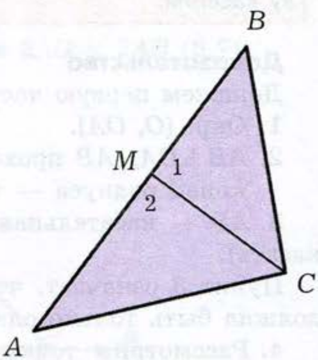


Рис. 8.39

5 Даны прямая и точка, не принадлежащая этой прямой. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через данную точку?

6 Даны прямая a и точка B. Через точку B проведены две прямые, пересекающие прямую a. Могут ли эти прямые быть перпендикулярными прямой a?

7 Могут ли каждые две прямые, на которых лежат боковые рёбра треугольной пирамиды, быть перпендикулярными?

8 Могут ли все основания высот треугольника располагаться: а) на сторонах треугольника; б) на продолжениях сторон?

П

9 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и BC. Постройте высоту этого треугольника, проходящую через вершину B.

10 На рис. 8.40 изображена треугольная пирамида $SABC$. Проведите по одной высоте в каждой грани пирамиды. Сколько всего высот имеют грани этой пирамиды?

11 Постройте высоты треугольников: а) остроугольного; б) прямоугольного; в) тупоугольного.

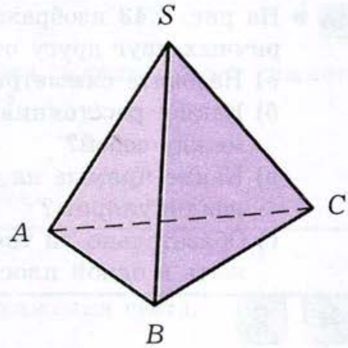


Рис. 8.40

М

12 Возьмите точку M внутри равностороннего треугольника и опустите перпендикуляры MP, MQ и MR на его стороны (рис. 8.41). Докажите, что сумма этих отрезков не зависит от выбора точки M и равна высоте треугольника.

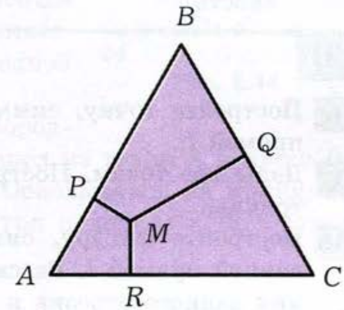


Рис. 8.41

К § 8.4

Н ⇓

13 • На рис. 8.42 изображены два симметричных относительно оси l четырёхугольника.

а) В какие точки перейдут при этой симметрии точки A, B, C, O?

б) Какие точки перейдут сами в себя?

в) В какие отрезки перейдут при этой симметрии отрезки AC и OB?

г) В какую фигуру перейдёт четырёхугольник $OABC$?

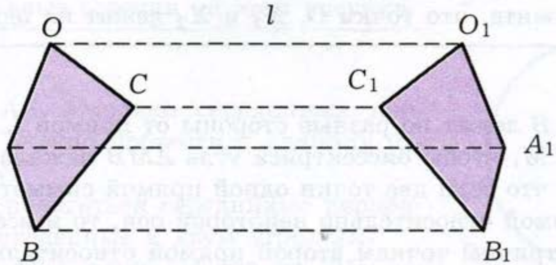


Рис. 8.42

14 На рис. 8.43 изображены 3 пары точек, симметричных друг другу относительно оси p.

а) Назовите симметричные друг другу точки.

б) Какие расстояния на этом рисунке равны между собой?

в) Какие прямые на этом рисунке взаимно перпендикулярны?

г) Обязательно ли точки A, A_1 и B, B_1 будут лежать в одной плоскости?

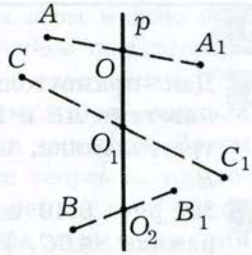


Рис. 8.43

Н ⇑

15 Сколько осей симметрии имеют: а) луч; б) отрезок; в) прямая; г) плоскость?

Н

16 Постройте точку, симметричную данной точке A относительно данной прямой l.

17 Даны две точки. Постройте прямую, относительно которой они симметричны.

18 Постройте фигуру, симметричную данному отрезку AB относительно данной прямой l. Рассмотрите различные случаи взаимного расположения данного отрезка и прямой.

19 Постройте фигуру, симметричную данному квадрату $ABCD$ относительно данной оси a.

П

20 Внутри угла AOB в 40° дана точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны M относительно сторон угла. Найдите величину угла M_1OM_2.

21 Даны отрезок AB и две точки C и D, такие, что $CA = CB$ и $DA = DB$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой CD.

22 Во внутренней области прямого угла BOD взята точка X и построены точки X_1 и X_2, симметричные точке X относительно сторон данного угла. Докажите, что точки O, X_1 и X_2 лежат на одной прямой.

М

23 Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l. Найдите на ней такую точку M, чтобы биссектриса угла AMB лежала на прямой l.

24 Докажите, что если две точки одной прямой симметричны двум точкам другой прямой относительно некоторой оси, то и все точки первой прямой симметричны точкам второй прямой относительно этой оси.

М

25 На плоскости нарисованы три равных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь объединение этих отрезков?

26 Какие центры и оси симметрии имеет куб?

27 Какие оси симметрии имеет тетраэдр?

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Теоретический вывод закона отражения света.

ВАША РОЛЬ. Физик-теоретик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Принцип, сформулированный в XVII веке великим французским учёным Пьером Ферма́, гласит: световой луч распространяется таким образом, чтобы преодолеть путь из одной точки в другую за наименьшее время.

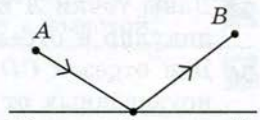


Рис. 8.44

ЗАДАНИЕ. По одну сторону от зеркала в однородной среде находятся точки A и B. Луч света прошёл из точки A в точку B, отразившись от зеркала в точке C (рис. 8.44). Основываясь на принципе Ферма, определите связь между углами ACM (угол падения) и BCN (угол отражения).

К § 8.5–8.6

Н ↓

28 • Прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Каким свойством обладают точки, принадлежащие этому серединному перпендикуляру?

29 • На рис. 8.45а изображены два перпендикулярных диаметра окружности.

а) Назовите оси симметрии окружности на этом рисунке.

б) Назовите равные отрезки на этом рисунке.

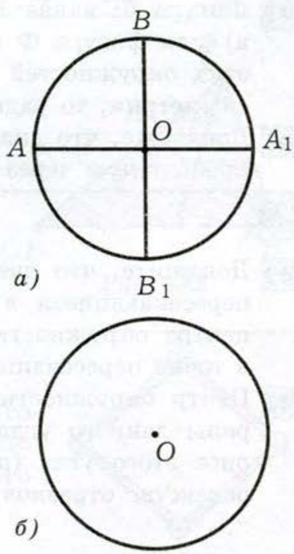


Рис. 8.45

Н ⇑

30 • Дан отрезок AB. Сколько серединных перпендикуляров можно провести к данному отрезку? Почему?

31 • Как могут располагаться серединные перпендикуляры, проведённые к двум отрезкам?

32 • Даны отрезок AB и точка M вне его. Можно ли через точку M провести серединный перпендикуляр к отрезку AB?

33 На рис. 8.45б изображена окр. (O, r). Какие центры и оси симметрии есть у этой окружности?

34 Ответьте на следующие вопросы:

а) Сколько осей симметрии данной окружности проходит через данную точку?

б) Сколько осей симметрии может иметь объединение двух окружностей?

Н

35 Даны точки A и B. Постройте серединный перпендикуляр к отрезку AB.

36 Дан отрезок CD. Постройте множество точек, равноудалённых от концов отрезка CD.

37 На рис. 8.46 изображена сфера радиуса R с центром в точке O. Какие центры и оси симметрии есть у этой сферы?

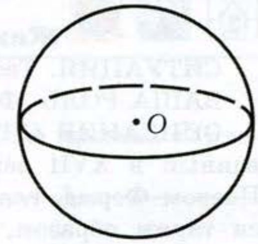


Рис. 8.46

П

38 Две окружности имеют общий центр. AB — хорда окружности меньшего радиуса, C и D — точки пересечения прямой AB с окружностью большего радиуса. Докажите, что $BC = AD$.

39 Постройте хорду данной окружности при условии, что серединой хорды является данная точка, расположенная внутри плоскости окружности.

40 Фигура Ф является объединением двух окружностей. Докажите, что: а) если фигура Ф имеет бесконечно много осей симметрии, то центры этих окружностей совпадают; б) если фигура Ф имеет только две оси симметрии, то радиусы этих окружностей равны.

41 Докажите, что диаметр окружности, который делит пополам хорду, не проходящую через центр окружности, перпендикулярен этой хорде.

М

42 Докажите, что две хорды окружности, пересекающиеся в точке, отличной от центра окружности, не могут делиться в точке пересечения пополам.

43 Центр окружности, пересекающей стороны данного угла, лежит на биссектрисе этого угла (рис. 8.47). Докажите равенство отрезков DA и MC, BA и BC.

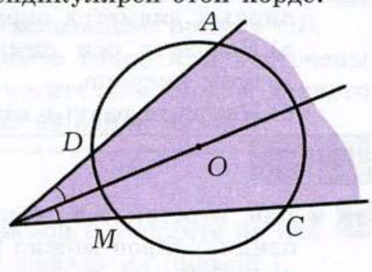


Рис. 8.47

К § 8.7

Н ⇓

44 Сколько осей симметрии имеет угол?

Н ⇑

45 Имеют ли оси симметрии: а) разносторонний треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) равносторонний треугольник? Если да, то сколько?

46 В каком треугольнике: а) высота совпадает с медианой; б) медиана совпадает с биссектрисой; в) биссектриса совпадает с высотой?

Н

47 Постройте угол, осью симметрии которого является данная прямая a.

48 Постройте равносторонний треугольник, осью симметрии которого является данная прямая.

49 Высота, проведённая из вершины равнобедренного треугольника, отсекает от него треугольник, периметр которого равен 18 см. Вычислите длину высоты, если периметр данного равнобедренного треугольника равен: а) 24 см; б) 30 см; в) 20 см.

50 Постройте равнобедренный треугольник: а) по основанию a и боковой стороне b; б) по боковой стороне b и высоте h, проведённой к основанию; в) по основанию a и высоте h, проведённой к основанию.

П

51 Докажите, что разносторонний треугольник не имеет осей симметрии.

52 Докажите равенство: а) медиан; б) биссектрис; в) высот равнобедренного треугольника, проведённых к его боковым сторонам.

53 Дано: $AB = BC$, $\angle BAD = \angle BCE$ (рис. 8.48). Докажите, что $\triangle BDE$ — равнобедренный.

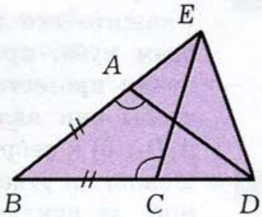


Рис. 8.48

М

54 Как воспользоваться шарнирным механизмом со звеньями равной длины (рис. 8.49) для построения: а) биссектрисы данного угла; б) середины данного отрезка; в) центра данной окружности?

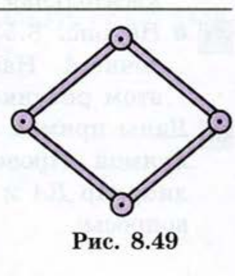


Рис. 8.49

55 Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

56 Через внутреннюю точку данного угла проведите прямую, отсекающую от сторон этого угла равные отрезки.

К § 8.9–8.10

Н ⇓

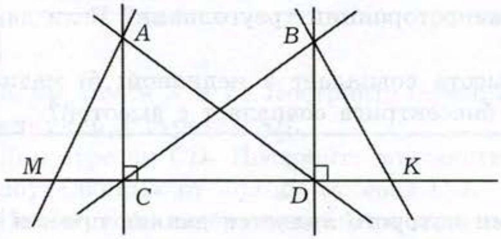


Рис. 8.50

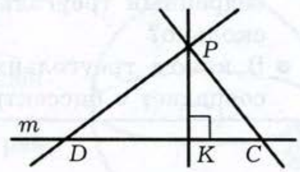


Рис. 8.51

57 ● На рис. 8.50 изображено несколько прямых. Назовите перпендикуляры и наклонные, проведённые к прямой MK.

58 ● На рис. 8.51 из точки P к прямой m проведены три прямые, из них $PK \perp m$. Назовите на рисунке перпендикуляр и наклонные, проведённые из точки P к прямой m. Какой из отрезков PD, PK и PC имеет наименьшую длину?

Н ⇑

59 ● На рис. 8.52 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите все прямые, перпендикулярные рёбрам куба, проходящие через точку A. Можно ли провести такие прямые через точку A, чтобы они являлись наклонными: а) к ребру A_1D_1; б) к ребру A_1B_1?

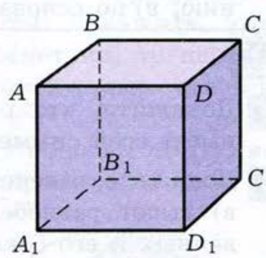


Рис. 8.52

60 ● Можно ли утверждать, что если все точки прямой, за исключением одной, являются внешними относительно окружности, то прямая — касательная к окружности?

61 ● На рис. 8.53 прямая AB касается окр. (O, OA) в точке A. Назовите перпендикулярные прямые на этом рисунке.

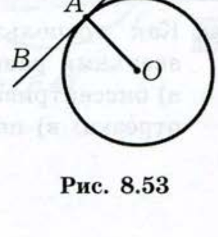


Рис. 8.53

62 Даны прямая a и точка B, не принадлежащая этой прямой. Проведите из точки B к прямой a перпендикуляр BA и две наклонные BC и BD. Ответьте на вопросы:

а) Как могут быть расположены перпендикуляр и наклонные по отношению друг к другу?

б) Какой из отрезков BA, BC и BD имеет наименьшую длину и почему?

в) Сколько пар смежных углов образовалось?

г) Назовите получившиеся прямые углы.

П

63 Пусть AK — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой a. AC и AB — наклонные, проведённые из точки A к прямой a. Докажите, что: а) если $KC < KB$, то $AC < AB$; б) если $KC = KB$, то $AC = AB$.

64 Прямая a касается окружности с центром O и радиусом r. Найдите расстояние от точки O до прямой a, если диаметр окружности равен 10 см.

65 Постройте окружность данного радиуса r, которая касается данной прямой a в данной на ней точке M.

66 Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку этой окружности.

67 Докажите, что если отрезки AB и AB_1 являются касательными к окр. (O, r), B и B_1 — точки касания, то $AB = AB_1$.

М

68 Постройте касательную к данной окружности, перпендикулярную данной прямой.

69 Две окружности касаются внешним образом в точке A. На одной окружности взята точка C так, что прямая BC является касательной к каждой из окружностей. Докажите, что угол BAC — прямой.

70 Дана дуга окружности. Постройте центр этой окружности.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Наилучший обзор объекта.

ВАША РОЛЬ. Экскурсовод.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. На некотором расстоянии от прямолинейного участка шоссе находится дворец, подъезд к которому сейчас невозможен.

ЗАДАНИЕ. Из какой точки шоссе лучше всего организовать обзор дворца? Перерисуйте рис. 8.54 в тетрадь и укажите эту точку.

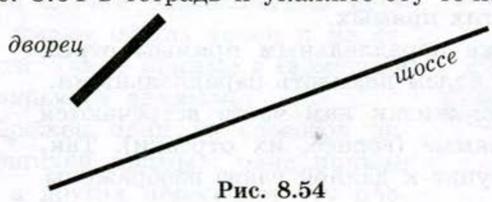
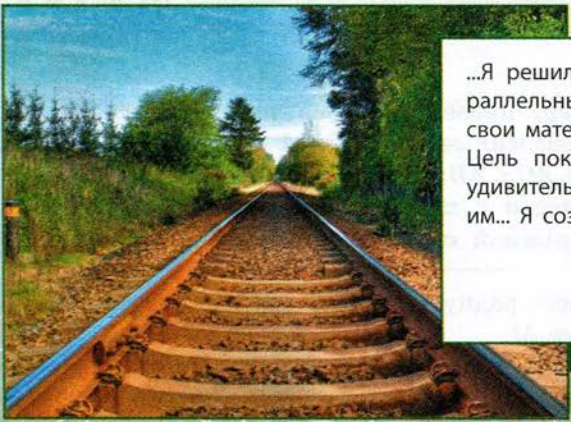


Рис. 8.54

Глава 9

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ



...Я решил опубликовать работу по теории параллельных, как только приведу в порядок свои материалы...
Цель пока не достигнута, но я сделал такое удивительное открытие, что почти подавлен им... Я создал новую вселенную из точек.

Янош Больяи

(венгерский математик, 1802–1860)

Открываем новые знания

§ 9.1 ПОНЯТИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Начнём с определения параллельных прямых.

Определение 44. Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Параллельность прямых обозначается знаком «$\parallel$». Запись «$a \parallel b$» читается так: «прямая a параллельна прямой b», или «прямые a и b параллельны».

На рис. 9.1 изображены две параллельные прямые. Каждая из них бесконечна, а на рисунке мы можем изобразить только отрезки этих прямых.

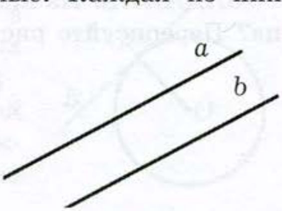


Рис. 9.1

Принадлежащие параллельным прямым отрезки и лучи также будем называть параллельными.

В повседневной жизни нам часто встречаются параллельные прямые (вернее, их отрезки). Так, например, на рисунке к данной главе изображены рельсы железнодорожного полотна, которые укладывают параллельно друг другу.

Параллельными бывают части строительных конструкций (рис. 9.2). Пять параллельных отрезков составляют нотный стан (рис. 9.3).

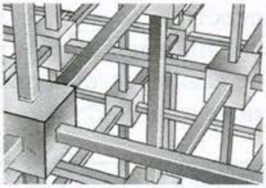


Рис. 9.2

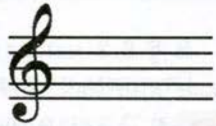


Рис. 9.3

Если внимательно прочитать определение параллельных прямых, то станет ясно, что если есть две параллельные прямые, значит, существует плоскость, их содержащая.

Многие геометрические фигуры, с которыми мы уже познакомились, содержат параллельные элементы. Например, у квадрата (рис. 9.4а) и прямоугольника (рис. 9.4б) противоположные стороны параллельны. Параллельными являются некоторые рёбра куба (рис. 9.4в) и прямоугольного параллелепипеда (рис. 9.4г).

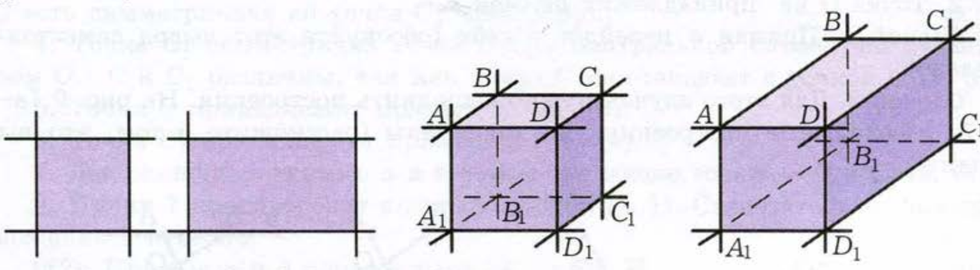


Рис. 9.4

К настоящему моменту мы рассмотрели два случая взаимного расположения двух прямых: пересекающиеся и параллельные прямые.

? Есть ли другие случаи расположения двух прямых?

Рис. 9.5

На рис. 9.5 вы видите часто встречающееся расположение двух шоссейных дорог, которое подсказывает нам ещё один случай расположения двух прямых: прямые не имеют общих точек и не лежат в одной плоскости. Такие прямые в геометрии называют *скрещивающимися прямыми*.

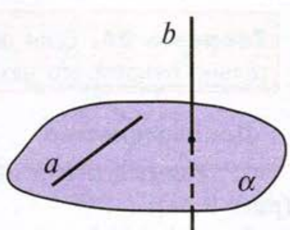


Рис. 9.6

На рис. 9.6 изображён один из способов построения скрещивающихся прямых: одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой. На рис. 9.6 мы видим две скрещивающиеся прямые: a и b.

Свойства скрещивающихся прямых мы будем отдельно изучать в старших классах.

§ 9.2 ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

В § 6.2 мы изучали свойства центральной симметрии.

Ответим на такой вопрос:

? В какую фигуру переходит данная прямая a при центральной симметрии относительно точки O?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим два случая:

1. Точка O принадлежит прямой а.
2. Точка O не принадлежит прямой a.

Случай 1. Прямая a перейдёт в себя (обоснуйте этот вывод самостоятельно).

Случай 2. Для этого случая нужно выполнить построения. На рис. 9.7а–9.7г необходимые построения уже проведены (расскажите о том, что вы видите).

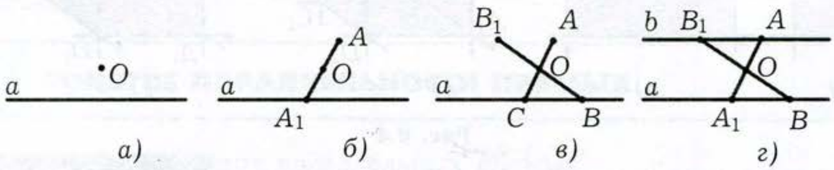


Рис. 9.7

! В результате построений мы убедились в том, что *при центральной симметрии прямая a перешла в прямую b.*

Докажем теорему, которая является первым признаком параллельности прямых.

Теорема 26. Если две различные прямые на плоскости симметричны относительно некоторого центра, то они параллельны.

Доказательство

1. Прямые a и b центрально-симметричны относительно точки O (дано) (рис. 9.8а).

2. $a \parallel b$ (требуется доказать).

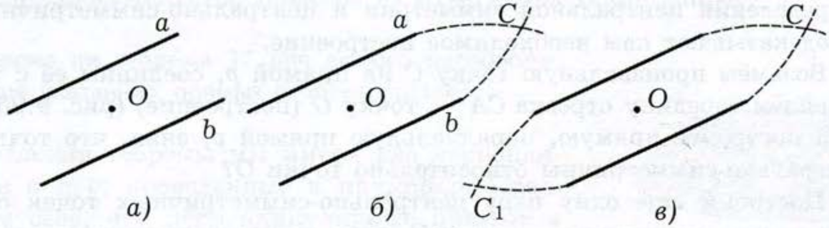


Рис. 9.8

Воспользуемся методом доказательства от противного.

3. Предположим, что прямые a и b не параллельны. Так как они различны, то это значит, что они имеют единственную общую точку C (предположение) (рис. 9.8б).

Эта точка C не может совпадать с центром симметрии O, так как тогда прямые a и b переходили бы каждая в себя, а не друг в друга.

Прямые a и b имеют центр симметрии — точку O, а значит, и у точки C есть симметричная ей точка C_1 (рис. 9.8в).

4. Точка C_1 симметрична точке C при центральной симметрии с центром O. C и C_1 различны, так как точка C не совпадает с точкой O (1, 3).

5. Точка C принадлежит прямым a и b (3).

6. Точка C_1 принадлежит прямым a и b (4).

7. Две различные прямые a и b имеют две общие точки — C и C_1 (5, 6).

8. Пункт 7 противоречит аксиоме прямой (А.1). Следовательно, предположение 3 неверно.

9(2). Прямые a и b параллельны (3, 7, 8). ■

Теорема 26 позволяет решить следующую задачу на построение.

Задача

Через точку, не принадлежащую данной прямой, провести прямую, параллельную данной прямой.

Решение

1. Пусть дана прямая p и точка A, $A \notin p$ (дано) (рис. 9.9а).

Вспомним Т.26 и построим прямую, центрально-симметричную прямой p и проходящую через точку A. Прежде всего нам нужно построить центр симметрии.

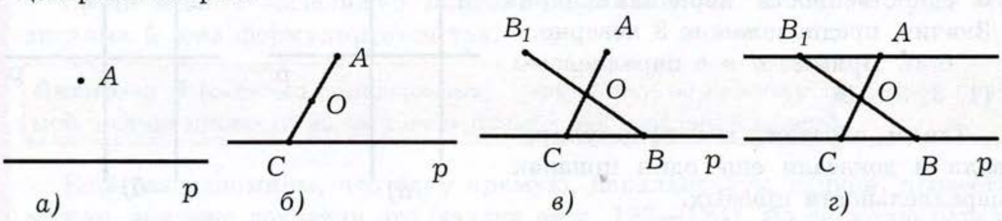


Рис. 9.9

Определения центральной симметрии и центрально-симметричных точек подсказывают нам необходимое построение.

2. Возьмём произвольную точку C на прямой p, соединим её с точкой A и найдём середину отрезка CA — точку O (построение) (рис. 9.9б).

Как построить прямую, параллельную прямой p, зная, что точки A и C центрально-симметричны относительно точки O?

3. Построим ещё одну пару центрально-симметричных точек относительно центра симметрии — точки O, одна из которых принадлежит прямой p. Пусть это будут точки B и B_1 (построение) (рис. 9.9в).

4. Точки A и B_1 определяют прямую AB_1 (рис. 9.9г) (1, 3, А.1).

5. Прямые CB и AB_1 — центрально-симметричны (2, 3).

6. $CB \parallel AB_1$ (2, 3, Т.26).

7. AB_1 параллельна прямой p (6). ■

§ 9.3 ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ

В этом параграфе мы рассмотрим, как связаны между собой перпендикулярность и параллельность прямых.

Рассмотрим случай, когда все эти прямые лежат в одной плоскости.

Теорема 27. Если две различные прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то эти прямые параллельны.

Доказательство

1. $a \perp p$, $b \perp p$, a и b различны (дано) (рис. 9.10а).

2. $a \parallel b$ (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

3. Предположим, что прямые a и b пересекаются в точке M (рис. 9.10б).

4. Через точку M проходят два перпендикуляра к прямой p (1, 3).

5. Пункт 4 противоречит Т.14 о единственности перпендикуляра. Значит, предположение 3 неверно.

6(2). Прямые a и b параллельны (1, 3, 5). ■

Таким образом, мы сформулировали и доказали ещё один признак параллельности прямых.

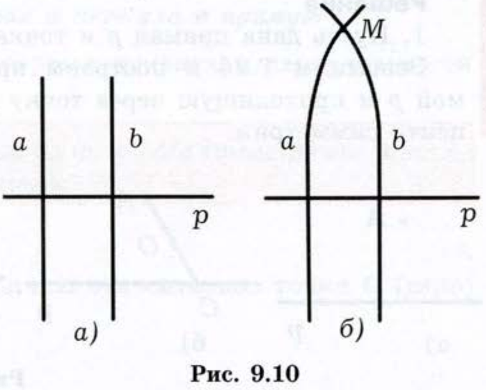


Рис. 9.10

После доказательства теоремы 27 ответим на такой вопрос:

? Верна ли теорема 27 для любого расположения указанных прямых в пространстве?

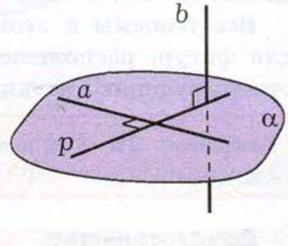


Рис. 9.11

В условии теоремы мы имеем два перпендикуляра a и b, проведённые к прямой p. Представьте себе, что перпендикулярные прямые a и p лежат в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α (рис. 9.11). Тогда прямые a и b являются скрещивающимися и не параллельны между собой.

На рис. 9.12 показано, как с помощью угольника и линейки можно провести через данную точку M прямую b, параллельную данной прямой a.

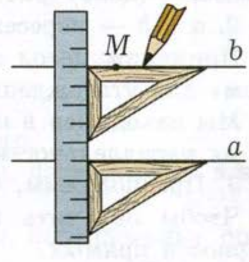


Рис. 9.12

? Как вы думаете, что является теоретической основой для такого способа построения прямой, параллельной данной?

Основой для такого построения является уже доказанная нами теорема 27.

§ 9.4 АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ. ПОСТРОЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Используя свойства центральной симметрии, мы уже получили способ построения параллельных прямых и выяснили, что через любую точку, лежащую вне данной прямой, можно провести хотя бы одну прямую, параллельную данной.

Мы уже упоминали о великом научном труде Евклида. В III веке до нашей эры в Александрии появилась его книга «Начала». В основу изложения геометрии в этой книге была положена система первоначальных утверждений — аксиом, которые не доказывались. Все остальные утверждения — теоремы — выводились из них строго логически.

Среди аксиом выделялась *аксиома параллельных*. В нашем курсе это аксиома 5, она формулируется так:

Аксиома 5 (аксиома параллельных). Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.

Ещё раз напомним, что одну прямую, параллельную данной, провести можно, мы уже доказали это (задача на с. 123—124). Из аксиомы параллельных следует, что такая прямая — единственная. Применяя аксиому 5, можно доказать много разных свойств параллельных прямых.

Все теоремы в этом параграфе мы будем формулировать и доказывать для фигур, расположенных в одной плоскости, а затем рассматривать соответствующие ситуации в пространстве.

Теорема 28. Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой пересекаются.

Доказательство

1. Прямая a перпендикулярна прямой c, а прямая b — наклонная к прямой c (дано) (рис. 9.13а).

2. a и b — пересекающиеся прямые (требуется доказать).

Применим метод доказательства от противного. Что является «противным» для утверждения о пересечении прямых?

Мы находимся в плоскости, и поэтому «противным» будет утверждение об их параллельности.

3. Предположим, что прямые a и b параллельны (предположение).

Чтобы получить противоречие, воспользуемся свойством перпендикулярности прямых.

4. Проведём через точку B прямую p, перпендикулярную прямой c (построение) (рис. 9.13б).

Мы получили:

5. $a \perp c$ и $p \perp c$ (1, 4).

6. $a \parallel p$ (5, Т.27).

7. $a \parallel p$ и $a \parallel b$ (3, 6).

8. П. 7 противоречит аксиоме параллельных, значит, предположение 3 неверно (3, 7).

9(2). Прямые a и b пересекаются (3, 8). ■

Эту теорему мы доказали для случая, когда все прямые лежат в одной плоскости. В пространстве это утверждение может оказаться неверным. Посмотрите на рис. 9.14 и объясните, почему в этом случае условие теоремы выполняется, а заключение – нет.

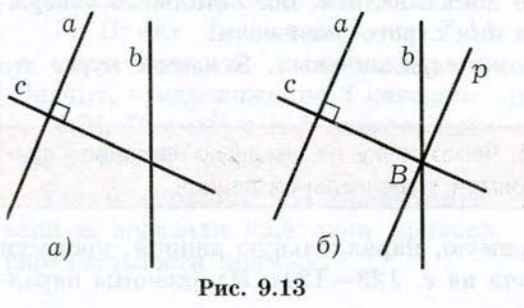


Рис. 9.13

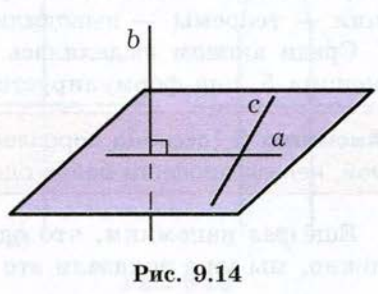


Рис. 9.14

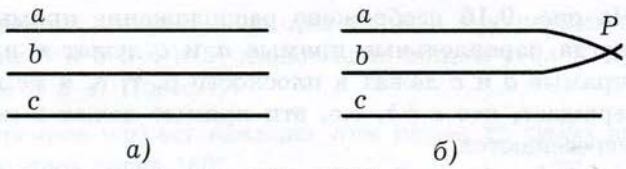


Рис. 9.15

Докажем *теорему о двух прямых, параллельных третьей* прямой, для прямых, лежащих в одной плоскости.

Теорема 29. Если различные прямые a и b параллельны прямой c, то прямые a и b параллельны.

Доказательство

1. $a \parallel c$, $b \parallel c$ (дано) (рис. 9.15а).
2. $a \parallel b$ (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

3. Допустим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке P (предположение) (рис. 9.15б).
4. Через точку P будут проходить две прямые a и b, параллельные прямой c (1, 3).
5. Пункт 4 противоречит аксиоме параллельных, и, следовательно, наше предположение 3 неверно (3, А.5).

6(2). $a \parallel b$ (3, 5). ■

Доказанное свойство параллельных прямых можно продемонстрировать на примере нотного стана (рис. 9.3).

Мы доказали эту теорему для случая, когда прямые a, b и c лежат в одной плоскости.

? Будет ли верна эта теорема для произвольного расположения указанных прямых в пространстве?

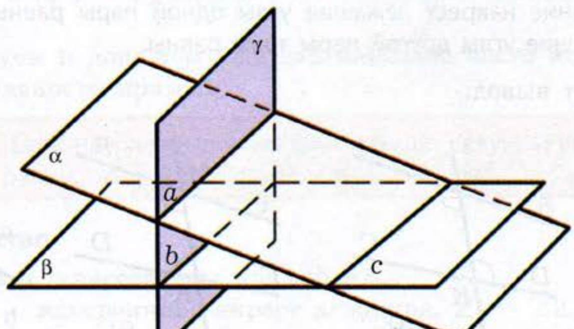


Рис. 9.16

Да, будет. На рис. 9.16 изображено расположение прямых a, b и c в пространстве, когда параллельные прямые a и c лежат в плоскости α, а параллельные прямые b и c лежат в плоскости β, т. е. $a \parallel c$ и $b \parallel c$.

Теорема утверждает, что $a \parallel b$, т.е. эти прямые лежат в некоторой плоскости γ и не пересекаются.

Доказательство этого факта будет дано в старших классах.

§ 9.5 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ СЕКУЩЕЙ

Пусть на плоскости даны две прямые AB и CD, и прямая l пересекает прямые AB и CD в точках M и K (рис. 9.17). Прямая MK по отношению к прямым AB и CD называется *секущей*.

Пары углов, которые образуются при пересечении прямых AB и CD секущей MK, имеют специальные названия.

Если точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой MK, то углы BMK и CKM называются *внутренними накрест лежащими* (рис. 9.18а).

Если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой MK, то углы BMK и DKM называются *внутренними односторонними* (рис. 9.18б).

При пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь углов, на рис. 9.19 они обозначены цифрами. Внутренними накрест лежащими углами являются углы 3 и 5, 4 и 6, а внутренними односторонними — углы 4 и 5, 3 и 6.

Кроме этого, имеются ещё пары углов, называемых *соответственными*. Это углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8.

Внутренние накрест лежащие углы одной пары, например, углы 3 и 5, являются смежными для внутренних накрест лежащих углов другой пары — углов 4 и 6 (рис. 9.19). Поэтому:

! Если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны.

Объясните этот вывод.

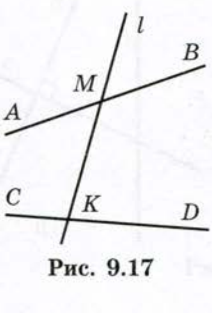


Рис. 9.17

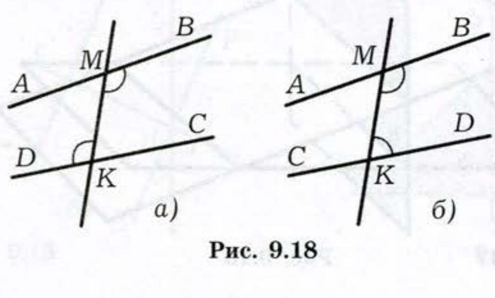


Рис. 9.18

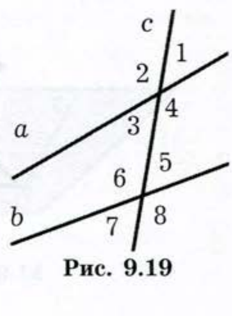


Рис. 9.19

Пары внутренних накрест лежащих углов и внутренних односторонних, например, углы 3 и 5 и 4 и 5, имеют один общий угол 5, а два других угла — смежные 3 и 4. Поэтому:

! Если внутренние накрест лежащие углы равны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

! Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Объясните эти выводы.

Для каждой пары соответственных углов один из этих углов и угол, вертикальный с другим, образуют пару внутренних накрест лежащих углов, например, для пары соответственных углов 1 и 5 угол 5 и угол 3 (вертикальный с углом 1) являются внутренними накрест лежащими. Поэтому:

! Если равны соответственные углы, то равны и связанные с ними внутренние накрест лежащие углы.

! Если равны внутренние накрест лежащие углы, то равны и связанные с ними соответственные углы.

§ 9.6 ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Ответим на такой вопрос:

? Что нужно знать о двух прямых, чтобы утверждать, что они параллельны?

Ответ на поставленный вопрос будет *признаком параллельности прямых*.

У нас уже есть два признака параллельности прямых — теоремы 26 и 27.

Сформулируем и докажем ещё два наиболее часто используемых признака параллельности прямых.

Теорема 30. Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

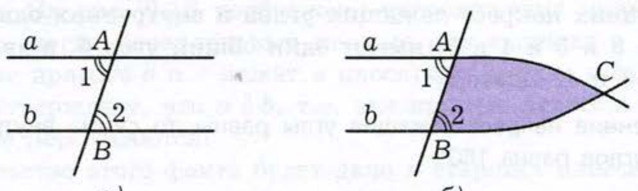
Доказательство

1. Прямые a и b пересечены прямой AB.
2. $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние накрест лежащие, $\angle 1 = \angle 2$.

$\Big\}$ (дано) (рис. 9.20а)

3. $a \parallel b$ (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.



а)   б)

Рис. 9.20

4. Предположим, что прямые a и b пересекаются в точке C (предположение) (рис. 9.20б).

5. Мы получили $\triangle ABC$ (на рисунке он выделен цветом) (4).

6. $\angle 1$ — внешний угол этого треугольника (4, 5).

7. $\angle 1 > \angle 2$ (6, теорема о свойстве внешнего угла треугольника — Т.11).

8. П. 7 противоречит условию 2 данной теоремы, следовательно, предположение 4 неверно.

9(3). $a \parallel b$ (8). ■

Теорема 31. Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство теоремы 31 вытекает из теоремы 30: можно доказать, что сумма внутренних односторонних углов равна 180° в том и только в том случае, если внутренние накрест лежащие углы равны.

Докажите это утверждение самостоятельно.

§ 9.7 СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ И СЕКУЩЕЙ

Рассмотрим случай, когда две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Такая прямая называется *секущей*.

Теорема 32. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Теорема 33. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Докажем теорему 32.

Доказательство

1. Прямые a и b параллельны.
2. Прямая c — секущая.

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ (дано) (рис. 9.21а)

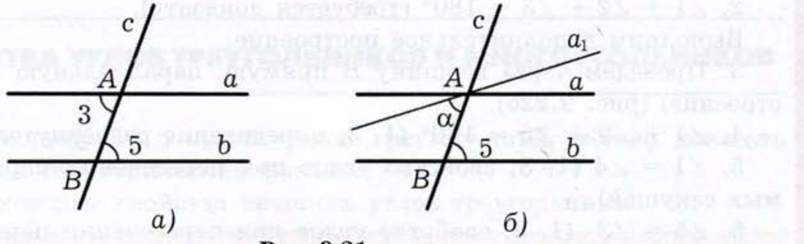


Рис. 9.21

3. $\angle 3$ и $\angle 5$ — внутренние накрест лежащие углы.

4. $\angle 3 = \angle 5$ (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

5. Допустим, что $\angle 3 \neq \angle 5$ (предположение).

6. Проведём прямую a_1, проходящую через точку A, и такую, что $\angle\alpha = \angle 5$ (построение) (рис. 9.21б).

7. По теореме 30 мы получаем, что $a_1 \parallel b$ (1, 2, 7, Т.30).

8. Так как a и a_1 различны, то существуют две прямые, проходящие через точку A и параллельные прямой b (1, 2, 7).

9. П. 8 противоречит аксиоме параллельных (А.5), значит, предположение 5 неверно (5, 8).

10(4). $\angle 3 = \angle 5$ (9). ■

Теорему 33 докажите самостоятельно.

§ 9.8 ТЕОРЕМА О СУММЕ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

В курсе геометрии особое место занимает следующая теорема:

Теорема 34. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Доказательство

1. ΔABC — данный треугольник, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ — его внутренние углы (дано) (рис. 9.22а).

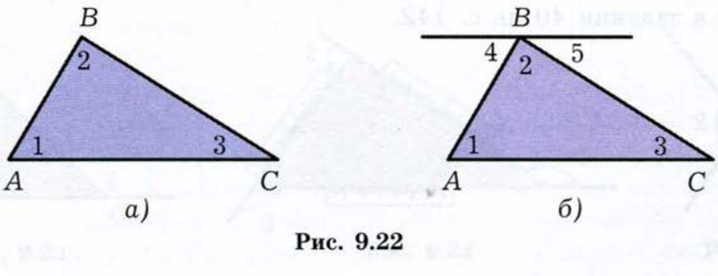


Рис. 9.22

2. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (требуется доказать).

Выполним дополнительное построение.

3. Проведём через вершину B прямую, параллельную прямой AC (построение) (рис. 9.22б).

4. $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$ (1, 3, определение развёрнутого угла).

5. $\angle 1 = \angle 4$ (1, 3, свойство углов при пересечении параллельных прямых секущей).

6. $\angle 5 = \angle 3$ (1, 3, свойство углов при пересечении параллельных прямых секущей).

7(2). $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (4, 5, 6). ■

Из этой теоремы можно получить различные следствия.

! Следствие. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Докажите это следствие самостоятельно.

Используя теорему о сумме углов треугольника и признаки равенства произвольных треугольников, можно сформулировать и доказать *признаки равенства прямоугольных треугольников*.

Теорема 35 (признак равенства по двум катетам). Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 36 (признак равенства по катету и прилежащему острому углу). Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 37 (признак равенства по гипотенузе и острому углу). Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Ещё один признак равенства прямоугольных треугольников не следует непосредственно из признаков равенства произвольных треугольников. Он рассмотрен в задании 40 на с. 142.

§ 9.9 СВОЙСТВА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Используя теорему 34 о сумме углов треугольника, можно доказать много различных геометрических фактов.

Докажем некоторые свойства внешних углов треугольника.

Теорема 38. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Доказательство

1. Треугольник ABC; $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ — внутренние углы треугольника. } (дано) (рис. 9.23)
2. $\angle 4$ — внешний угол.
3. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ (требуется доказать).

Мы знаем:

4. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (1, теорема о сумме углов треугольника).
5. $\angle 4 + \angle 3 = 180°$ (1, 2, определение внешнего угла).
6. $\angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle 3$ (4).
7. $\angle 4 = 180° - \angle 3$ (5).

8(3). $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (6, 7). ■

Проведём такой практический опыт.

Представим себе линейку, скользящую по сторонам треугольника (рис. 9.24). Возле каждой вершины линейка поворачивается на угол, равный внешнему углу треугольника, а после полного обхода вокруг треугольника (например, против часовой стрелки) линейка возвращается на прежнее место, сделав один полный оборот — на 360° (рис. 9.25). Итак:

! Сумма внешних углов треугольника равна 360° (берётся по одному внешнему углу для каждой вершины треугольника).

Докажите этот факт, используя свойства внутренних и внешних углов треугольника.

Теперь докажем теорему о сумме внутренних углов n-угольника.

Рис. 9.23

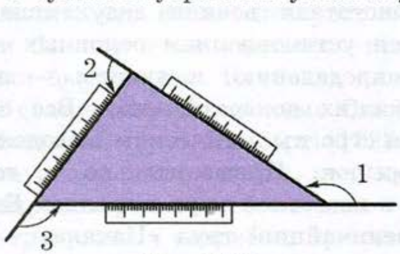


Рис. 9.24

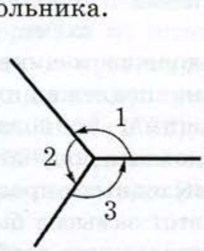


Рис. 9.25

Теорема 39. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $(n - 2) \cdot 180°$.

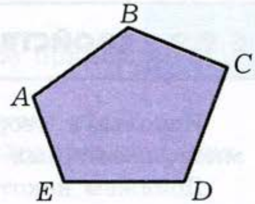


Рис. 9.26

Доказательство

1. Нам дан n-угольник. На рис. 9.26 изображён пятиугольник $ABCDE$.

2. Требуется доказать, что сумма внутренних углов любого n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$.

Нам уже известны некоторые свойства углов треугольника, поэтому попытаемся свести рассмотрение углов n-угольника к рассмотрению углов треугольников. Как это можно сделать? Многоугольник можно разбить на треугольники, например, так, как показано на рис. 9.27.

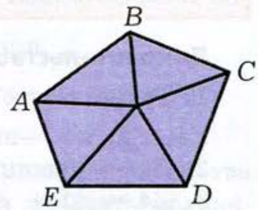


Рис. 9.27

3. Возьмём произвольную внутреннюю точку многоугольника и соединим её с вершинами (построение) (рис. 9.27).

4. В результате n-угольник разбился на n треугольников (построение) (рис. 9.27).

5. Сумма всех углов n треугольников равна $n \cdot 180°$ (4, Т.34).

Как получить из общей суммы углов треугольников сумму внутренних углов n-угольника? Нужно вычесть из неё $360°$ — сумму углов треугольников при вершине O.

6(2). Таким образом, сумма внутренних углов n-угольника равна

$$n \cdot 180° - 360° = (n - 2) \cdot 180° \text{ (4, 5).} \quad \blacksquare$$

§ 9.10* НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

Огромную роль в систематизации геометрических знаний сыграл древнегреческий учёный Аристотель (384–322 до н.э.), создавший теорию дедукции, т.е. логического вывода. По схеме Аристотеля всякая дедуктивная наука должна начинаться установлением основных понятий, не подлежащих определению, и аксиом — основных истин, не подлежащих доказательству. Всё остальное должно получаться строгим логическим выводом из этих исходных предпосылок. Применительно к геометрии этот замысел был в известной мере выполнен Евклидом, создавшим свой величайший труд «Начала» — первый в истории свод геометрических знаний в 13 книгах.

Аристотель

Евклид (около 365–300 до н.э.) работал в Александрии и возглавлял основанный в то время крупнейший научный центр древности — Александрийский музей.

Евклид

В «Началах» Евклида перед первой книгой помещены постулаты — требования геометрического характера, которые нужно принять, чтобы на их основе делать все дальнейшие выводы. Этих постулатов у Евклида пять:

«Нужно потребовать:

I. чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию;

II. чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неограниченно;

III. чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;

IV. чтобы все прямые углы были равны между собой;

V. чтобы если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов оказалась меньше двух прямых, то эти прямые при достаточном их продолжении пересекались бы, и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых».

Далее сформулированы 23 определения. Например, первое определение гласит: «*Точка есть то, что не имеет частей*».

В течение двух тысяч лет математики, относясь к «Началам» Евклида с большим уважением, подвергали их критике, указывали на те или иные недостатки и рекомендовали способы «очищения Евклида от пятен». Прежде всего критика относилась к пятому постулату, значительно более сложному, чем все остальные.

Особая роль пятого постулата, его сложность и недостаточная наглядность привели к тому, что математики позднейших времён стали пытаться доказать его как теорему. Некоторые учёные старались вывести этот постулат из остальных постулатов и аксиом Евклида, не добавляя к ним новых утверждений. Другие же заменяли его иной аксиомой, которую они считали более простой и наглядной.

Многие попытки доказательства проводились методом доказательства от противного, т.е. предполагалось, что пятый постулат неверен, и из этого делался ряд выводов. Если бы при этом удавалось прийти к противоречию, то пятый постулат был бы доказан. Наиболее далеко по этому пути продвинулись итальянский священник Джироламо Саккери (1667–1733) и швейцарский математик Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777). Однако ни Саккери, ни Ламберт не допускали мысли о том, что, кроме геометрии Евклида, возможна другая непротиворечивая геометрия.

Примерно в одно время три разных человека, три математика в разных странах мира пришли так или иначе к одной идее — созданию новой, *неевклидовой геометрии*. Это были Карл Фридрих Гаусс, Я́нош Бо́льяи и Николай Иванович Лобачевский.

Карл Фридрих Гаусс

Немецкий учёный *Карл Фридрих Гаусс* (1777–1855), которого называли королём математики, занимался теорией параллельных более тридцати лет, но высказывал твёрдое убеждение в правомерности неевклидовой геометрии лишь в частных письмах. Считается, что Гаусс сделал это открытие в 1824 году, но так и не объявил о нём официально.

Янош Больяи

Венгерский математик *Янош Больяи* (1802–1860) пришёл к идее неевклидовой геометрии в 1825 году, в 1832 году он опубликовал данные о своём открытии. Больяи был гусарским офицером, одним из знаменитых дуэлянтов, прекрасно играл на скрипке. Гусарское самолюбие плохо отразилось на его математической деятельности. Получив от Гаусса положительную оценку своего открытия в новой геометрии, он решил, что Гаусс присвоил себе его результаты. В последние годы жизни сознание Яноша Больяи помутилось, он уже не мог заниматься математикой.

Николай Иванович Лобачевский

Русский математик *Николай Иванович Лобачевский* (1792–1856) отличался от своих коллег силой воли, смелостью и упорством. Ему не было и тридцати лет, когда он сформулировал свои результаты и вскоре их опубликовал. Результаты, полученные Лобачевским, не были признаны в то время. Его относили к разряду учёных, проводивших «сумасшедшие исследования по сумасшедшей геометрии». Мировое признание работы Лобачевского получили уже после смерти автора.

Лобачевский сочетал свою научную деятельность с многогранной организаторской и просветительской работой. В течение 18 лет он был ректором Казанского университета.

Геометрия, которую мы изучаем в школе, — это *евклидова геометрия*. Постепенно возникали многочисленные вопросы:

Верно ли, что пространство, в котором мы живём, устроено именно так? Евклидово ли оно? Выполняются ли в нашем реальном пространстве аксиомы Евклида?

А как же иначе? Ведь аксиомы так очевидны: «через две точки проходит только одна прямая», «каждая прямая бесконечна в обе стороны» и т.д. Казалось бы, всё очевидно и иначе быть не может.

Однако Н.И. Лобачевский построил геометрию, в которой все аксиомы Евклида выполняются, кроме одной — аксиомы параллельных.

Наши представления о реальном мире могут подвергаться сомнению и изменению. Пока люди не узнали, что Земля имеет форму шара, они считали, что вертикали строго параллельны, а оказалось, что они пересекаются в центре Земли. Спутникам Магеллана казалось, что если они будут каждый день делать записи в судовом журнале, то, вернувшись из кругосветного плавания, они не ошибутся в счёте дней. И всё же оказалось, что один день «пропал».

Сейчас мы предполагаем и даже знаем, что наше пространство устроено сложнее, чем думал Евклид. Как же можно изучать пространство, отличное от *«употребительного»*, как говорил Лобачевский? С этой проблемой великолепно справился сам Лобачевский, построив свою геометрию.

? Что же такое геометрия Лобачевского?

Сам Лобачевский называл свою геометрию *воображаемой*. Реальный смысл и логическая непротиворечивость её вытекают из простой модели, придуманной немецким математиком Ф. Клейном. Кратко опишем эту модель.

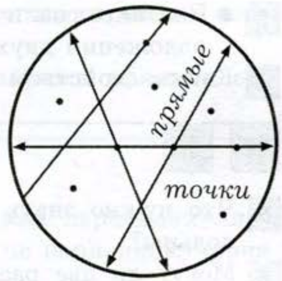


Рис. 9.28

За «плоскость» принимается внутренняя часть какого-либо круга (рис. 9.28), за «точки» — точки этой внутренней части, за «прямые» — хорды (конечно, с исключением концов, поскольку рассматривается только внутренняя часть круга). За «изометрии» принимаются преобразования круга, переводящие круг в себя, а хорды — в хорды. Соответственно равными называются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями.

Всякая теорема геометрии Лобачевского является в этой модели теоремой геометрии Евклида, и, наоборот, всякая теорема Евклида, говорящая о фигурах внутри данного круга, является теоремой геометрии Лобачевского. Поэтому если в геометрии Лобачевского имеется противоречие, то это же противоречие имеется и в геометрии Евклида.

То, что аксиома параллельных не выполняется в этой модели, видно непосредственно: на рис. 9.29 через точку C, не лежащую на «прямой» (т.е. на хорде) AB, проходит бесконечно много «прямых» (хорд), не пересекающих AB.

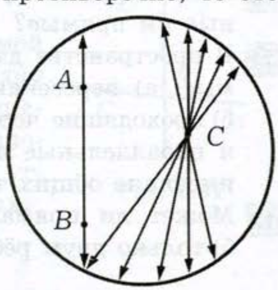


Рис. 9.29

Мы лишь познакомились с некоторыми основными положениями геометрии Лобачевского. Если вам показалось это интересным, вы можете узнать о ней больше.

Развиваем умения

К § 9.1–9.4

Н ⇓

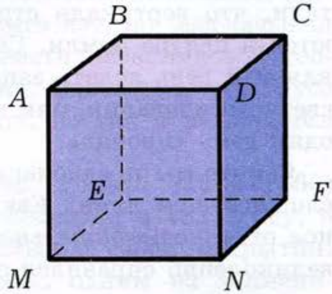


Рис. 9.30

1 Перечислите все рёбра куба (рис. 9.30), для которых содержащая их прямая: а) параллельна прямой BE; б) имеет с прямой BE одну общую точку.

2 Перечислите прямые, которые проходят через две вершины куба, отличные от M и C, и пересекаются с прямой MC (рис. 9.30).

3 **Назовите различные случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости.**

4 Каким свойством обладают центрально-симметричные прямые?

Н ⇑

5 Что нужно знать о прямых a и b, чтобы утверждать, что они параллельны?

6 Могут ли две различные центрально-симметричные прямые иметь общую точку?

7 Имеет ли центр симметрии фигура, являющаяся: а) объединением двух параллельных прямых; б) объединением трёх прямых, две из которых параллельны; в) объединением двух пересекающихся прямых? Если имеет, то сколько?

8 Можно ли провести прямую, параллельную каждой из пересекающихся прямых a и b?

9 Прямые a и b касаются окружности в диаметрально противоположных точках M и T. Каково взаимное расположение этих прямых?

10 Какие прямые при осевой симметрии с осью l переходят в параллельные им прямые?

11 В пространстве дан угол. Будут ли лежать в одной плоскости все прямые: а) пересекающие стороны этого угла в двух различных точках; б) проходящие через вершину угла; в) пересекающие одну из сторон угла и параллельные другой стороне; г) пересекающие одну из сторон и не имеющие общих точек с другой стороной?

12 Может ли прямая быть параллельна: а) только одному ребру куба; б) только двум рёбрам; в) только трём рёбрам?

Н

13 Постройте прямую: а) симметричную данной прямой a относительно данного центра O ($O \notin a$); б) параллельную данной прямой a и проходящую через данную точку.

14 Даны треугольник ABC и точка M. Постройте прямые, проходящие через точку M и параллельные прямым AB, BC и AC.

П

15 Даны четыре параллельные прямые, из которых никакие три не лежат в одной плоскости. Сколько существует плоскостей, каждая из которых содержит две из этих прямых?

16 Докажите, что середина отрезка с концами на двух параллельных прямых является серединой проходящего через неё другого отрезка с концами на тех же прямых.

17 Докажите, что прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

М

18 Докажите, что если на плоскости какая-либо прямая перпендикулярна одной из двух пересекающихся прямых, то она не перпендикулярна другой.

19 На сколько частей могут делить плоскость 4 различные прямые? Каждый случай изобразите на рисунке.

К § 9.5–9.7

Н ⇓

20 • При пересечении двух параллельных прямых секущей сколько образуется пар: а) внутренних накрест лежащих углов; б) внутренних односторонних углов?

21 • На рис. 9.31 прямые AB и CD пересечены прямой MK. а) Какие точки на этом рисунке лежат по одну сторону (в одной полуплоскости) относительно прямой MK? б) Какие точки лежат в разных полуплоскостях относительно прямой MK? в) Назовите углы, образовавшиеся при пересечении этих прямых.

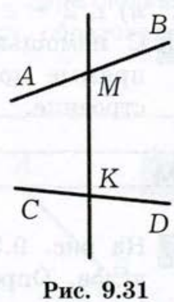


Рис. 9.31

Н ⇑

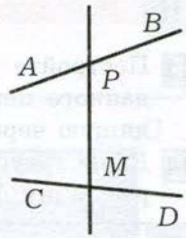


Рис. 9.32

22 ● На рис. 9.32 две прямые AB и CD пересечены прямой PM. Что можно сказать о расположении прямых AB и CD? Лежат ли прямые AB, CD и PM в одной плоскости?

23 ● Могут ли внутренние накрест лежащие углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых третьей, быть: а) оба острыми; б) оба тупыми; в) один острым, а другой тупым?

24 ● На рис. 9.33 $\angle 1 = \angle 2$. Что можно сказать о прямых a и b? Обоснуйте свой ответ.

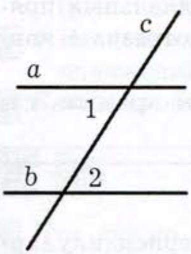


Рис. 9.33

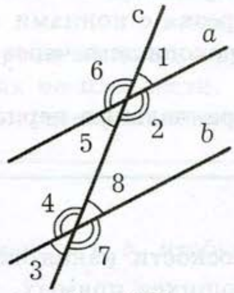


Рис. 9.34

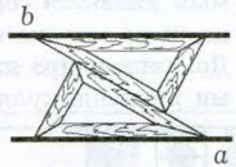


Рис. 9.35

П

25 Прямые a и b параллельны, прямая c пересекает их (рис. 9.34). Докажите, что: а) $\angle 1 = \angle 3$; б) $\angle 1 = \angle 8$; в) $\angle 6 = \angle 7$; г) $\angle 3 = \angle 5$; д) $\angle 4 = \angle 6$; е) $\angle 7 = \angle 2$; ж) $\angle 5 = \angle 8$; з) $\angle 2 = \angle 4$; и) $\angle 2 + \angle 8 = 180°$; к) $\angle 7 + \angle 1 = 180°$.

26 С помощью двух одинаковых чертёжных угольников параллельные прямые можно проводить, как показано на рис. 9.35. Обоснуйте построение.

М

27 На рис. 9.36 указаны величины некоторых углов. Определите величины остальных углов.

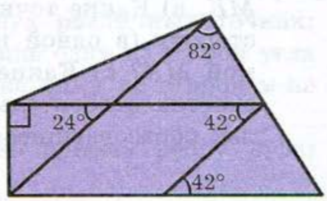


Рис. 9.36

Н ⇓

28 ● Может ли у треугольника быть: а) два тупых угла; б) два прямых угла?

Н ⇑

29 ● Ответьте на вопросы:

а) Могут ли все внутренние углы четырёхугольника быть острыми?

б) Могут ли все внутренние углы четырёхугольника быть тупыми?

в) Какое наибольшее число тупых углов может иметь четырёхугольник?

Н

30 В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$. Чему равен $\angle C$?

31 В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 60°$. Чему равен $\angle B$?

32 Дан треугольник ABC. Ответьте на вопросы:

а) Сколько прямых, параллельных основанию треугольника — отрезку AC, можно провести через точку B? Почему?

б) Сколько пар равных углов образовалось при вершине B треугольника ABC на рис. 9.37? Назовите эти углы.

в) На рис. 9.37 $\angle 7 = 70°$, $\angle 8 = 30°$, $BD \parallel AC$. Найдите величины углов 1, 2 и 3.

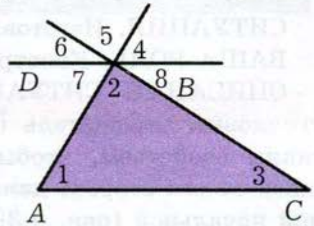


Рис. 9.37

33 Через вершины треугольника ABC проведены прямые, параллельные противоположным сторонам. Найдите углы треугольника, образованного этими прямыми, если $\angle A = 25°$, $\angle B = 68°$.

П

34 Дано: $MN \parallel KL$ (рис. 9.38). Докажите, что $\angle ABC = \angle NAB + \angle BCL$.

35 Докажите, что если у равнобедренного треугольника угол при вершине, противолежащей основанию, равен 60°, то такой треугольник равносторонний.

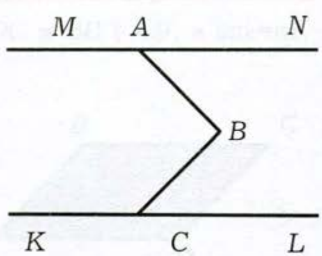


Рис. 9.38

М

36 Докажите, что любые две биссектрисы треугольника пересекаются.

37 Докажите, что любые две медианы треугольника пересекаются.

38 Докажите: а) что не существует треугольника, сумма любых двух углов которого меньше $120°$; б) что у треугольника, каждый из углов которого меньше суммы двух других, все углы острые.

39 Докажите, что треугольник нельзя разбить на два равных треугольника прямой, которая проходит через его вершину и не перпендикулярна противолежащей стороне.

40 Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету: если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Изготовление уголкового отражателя.

ВАША РОЛЬ. Конструктор.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Требуется изготовить уголковый отражатель из двух зеркал, обладающий таким свойством, чтобы любой луч света, отразившись от его сторон, двигался по прямой, параллельной начальной (рис. 9.39).

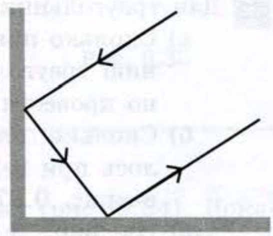


Рис. 9.39

ЗАДАНИЕ. Возможно ли изготовить такой отражатель? Если да, то какой надо взять угол между зеркалами?

Глава 10

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ, РОМБ, ТРАПЕЦИЯ

Хоть я и не особенно забочусь о славе, однако параллелограммом горжусь больше, чем каким-либо другим изобретением, сделанным мною.

Джеймс Уатт
(английский изобретатель, 1736–1819)

Открываем новые знания

§ 10.1 ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

Начнём изучение одного из наиболее важных видов четырёхугольников, имеющих параллельные стороны, — *параллелограмма*.

Определение 45. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.

На рис. 10.1 у четырёхугольника $ABCD$ $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$, а значит, он является параллелограммом.

Можно сформулировать следующие свойства параллелограмма:

! Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.

! Сумма внутренних углов параллелограмма равна 360°.

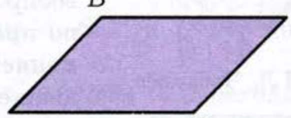
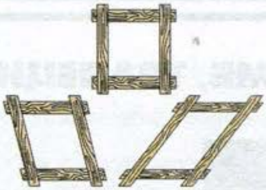
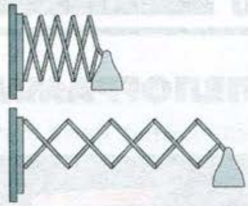


Рис. 10.1



а)



б)

Рис. 10.2

! Каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Докажите эти свойства самостоятельно.

Если сконструировать модель параллелограмма на шарнирах, то, меняя величины углов, можно получить различные параллелограммы с теми же длинами сторон (рис. 10.2а). Поэтому о параллелограмме говорят, что это фигура «подвижная», а не «жёсткая», как треугольник.

Свойство подвижности параллелограмма часто используется на практике. Так, шарнирный параллелограмм применяется, например, для проведения параллельных прямых на различных расстояниях друг от друга. На рис. 10.2б изображена лампа. Такую лампу можно придвигать к освещаемому предмету или отодвигать от него благодаря шарнирному устройству, состоящему из параллелограммов.

Дж. Уатт

В начале этой главы помещён рисунок шарнирного механизма выдающегося английского изобретателя Джеймса Уатта.

Этот механизм был предложен Дж. Уаттом в 1774 году, когда он решал такую проблему: как связать поршень с точкой махового колеса, чтобы вращение колеса сообщало поршню прямолинейное движение[1].

П.Л. Чебышёв

Шарнирными механизмами в своё время много и плодотворно занимался выдающийся русский учёный, математик и механик Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894). Им был предложен шарнирный механизм для воспроизведения движения некоторой точки механизма по прямой линии. Этот параллелограмм Чебышёва применяется в приборах для получения прямолинейного движения точки без направляющих. П.Л. Чебышёв соб-

[1] Подробнее об этом механизме можно прочитать в статье В.В. Вавилова «Шарнирные механизмы. Кривые Уатта» (Квант. 1977. № 1).

ственноручно изготовил множество самых разнообразных механизмов: лодку с гребным аппаратом, шагающего человека (стопоходящую машину) и другие замечательные вещи.

§ 10.2 ЦЕНТР СИММЕТРИИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Зададим себе такой вопрос:

? Имеет ли параллелограмм центр симметрии?

Мы докажем следующую теорему:

Теорема 40. Середина диагонали параллелограмма является центром симметрии этого параллелограмма.

Доказательство

1. $ABCD$ — параллелограмм.
2. Точка O – середина диагонали AC параллелограмма $ABCD$.

} (дано) (рис. 10.3)

3. O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$ (требуется доказать).

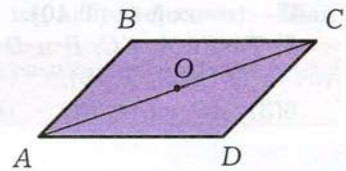


Рис. 10.3

Нам нужно доказать, что параллелограмм при симметрии с центром O переходит в себя.

4. Выполним центральную симметрию параллелограмма $ABCD$ с центром O.

5. Вершина A параллелограмма $ABCD$ при этой симметрии переходит в точку C (2, 4, определение центральной симметрии).

6. При симметрии с центром O прямая AB переходит в параллельную ей прямую, проходящую через точку C, т.е. в прямую CD (4, Т.26 о параллельности центрально-симметричных прямых).

7. Прямая CB при этой симметрии переходит в прямую AD (4, свойство центральной симметрии).

8. При симметрии с центром O прямые AB и BC переходят соответственно в прямые CD и AD. Точка B — точка пересечения прямых AB и BC, поэтому она при этой симметрии переходит в точку пересечения прямых CD и AD, т.е. в точку D (6, 7).

9. Итак, при симметрии с центром O вершины A, B, C и D переходят соответственно в вершины C, D, A и B (8).

10(3). Параллелограмм $ABCD$ при симметрии с центром O переходит в себя, следовательно, середина диагонали параллелограмма (точка O) является центром его симметрии. ■

Поскольку центральная симметрия является изометрией, из Т.40 можно получить такие следствия — свойства параллелограмма:

Следствие 1. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

Следствие 2. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

Следствие 3. Диагонали параллелограмма делятся точкой их пересечения пополам.

Докажите следствия 1 и 2 самостоятельно. Следствие 3 мы сейчас докажем.

Доказательство

1. $ABCD$ — параллелограмм. (дано)
2. AC и BD — диагонали параллелограмма $ABCD$, точка O — точка пересечения диагоналей. (рис. 10.4)
3. $AO = CO$, $BO = DO$ (требуется доказать).
4. По теореме 40 центр симметрии параллелограмма лежит на его диагонали. Значит, центр симметрии параллелограмма $ABCD$ лежит и на диагонали AC, и на диагонали BD, т.е. является точкой пересечения диагоналей — точкой O (Т.40).

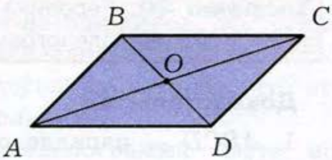


Рис. 10.4

5. Точки A и C, B и D симметричны относительно центра симметрии — точки O (1, 2, Т.40).

6(3). $AO = CO$, $BO = DO$ (4, свойства центральной симметрии). ■

§ 10.3 ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теперь мы докажем некоторые признаки параллелограмма, т.е. ответим на вопрос:

? Что нужно знать о четырёхугольнике, чтобы утверждать, что он является параллелограммом?

Ответом на этот вопрос могут быть следующие теоремы.

Теорема 41. Четырёхугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны попарно равны.

Доказательство

1. $ABCD$ — четырёхугольник. (дано)
2. $AB = CD$, $AD = BC$. (рис. 10.5а)
3. $ABCD$ — параллелограмм (требуется доказать).

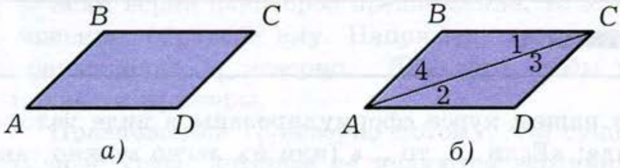


Рис. 10.5

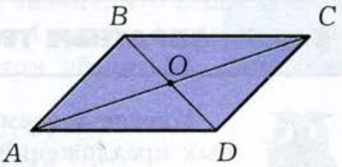


Рис. 10.6

Для доказательства п. 3 нужно доказать параллельность противолежащих сторон четырёхугольника $ABCD$. Для этого можно воспользоваться теоремой 30 — признаком параллельности прямых.

4. Проведём диагональ AC четырёхугольника $ABCD$ и получим два треугольника — ABC и CDA (построение) (рис. 10.5б).
5. AC — общая сторона этих треугольников (4).
6. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (2, 5, признак равенства треугольников по трём сторонам).
7. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (6).

Пары углов в п. 7 являются внутренними накрест лежащими при пересечении секущей двух прямых. Значит, можно использовать признак параллельности двух прямых — Т.30.

8. $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ (7, Т.30).
9(3). $ABCD$ — параллелограмм (8, определение параллелограмма). ■

Теорема 42. Четырёхугольник является параллелограммом, если его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.

Доказательство

1. $ABCD$ — четырёхугольник.
2. AC и BD — диагонали четырёхугольника, которые пересекаются в точке O. $AO = CO$ и $BO = DO$.

} (дано) (рис. 10.6)

3. $ABCD$ — параллелограмм (требуется доказать).

В доказательстве будем использовать Т.41.

4. Рассмотрим две пары треугольников: AOB и COD, BOC и AOD (1, 2).
5. $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ (2, Т.10 о равенстве вертикальных углов).
6. $\triangle AOB = \triangle COD$, $\triangle BOC = \triangle DOA$ (2, 5, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).
7. $AB = CD$, $AD = BC$ (6).
8(3). $ABCD$ — параллелограмм (6, Т.41). ■

Теорема 43. Четырёхугольник является параллелограммом, если две его противоположные стороны равны и параллельны.

Докажите эту теорему самостоятельно, воспользовавшись Т.41.

§ 10.4* ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Многие теоремы в нашем курсе сформулированы в виде условных предложений вида: «Если ..., то ...» (или их легко можно так сформулировать). Например, следствие 3 из теоремы 40 можно сформулировать так:

«Если четырёхугольник является параллелограммом, то его диагонали, пересекаясь, делятся пополам». (1)

Первая часть теоремы, высказанной в виде условного предложения (от слова «если» до слова «то»), выражает *условие теоремы*, а вторая часть (после слова «то») — *заключение теоремы*. В условии говорится о том, что дано, а в заключении — о том, что требуется доказать.

Для теоремы (1), сформулированной в виде условного предложения, нетрудно сформулировать *обратное предложение*. Для этого условие и заключение данной теоремы следует поменять местами. Полученные при этом предложения называются *взаимно обратными*, или *взаимно обратными теоремами*.

Обратное предложение формулируется так:

«Если диагонали четырёхугольника, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырёхугольник является параллелограммом». (2)

Приведём несколько примеров прямых и обратных предложений:

1. Если углы вертикальные, то они равны.	1_1. Если углы равны, то они являются вертикальными.
2. Если четырёхугольник является параллелограммом, то его противоположные стороны попарно равны.	2_1. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
3. Если четырёхугольник *ABCD* является параллелограммом, то $AB = CD$.	3_1. Если для четырёхугольника *ABCD* выполняется равенство $AB = CD$, то этот четырёхугольник является параллелограммом.
4. Если четырёхугольник является параллелограммом, то две его противоположные стороны равны и параллельны.	4_1. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

Если верно некоторое предложение, то это не значит, что верно и предложение, обратное ему. Например, предложение 1 верно, а обратное ему предложение 1_1 неверно. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры.

Предложение 1_1 неверно потому, что существуют равные углы, которые не являются вертикальными (рис. 10.7). Предложение 3_1 неверно, поскольку существует четырёхугольник $ABCD$, удовлетворяющий условию, но не являющийся параллелограммом (рис. 10.8).

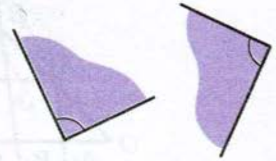


Рис. 10.7

Предложения, обратные предложениям 2 и 4, верны.

Если верны некоторая теорема и теорема, обратная ей, то для краткости их часто формулируют в виде одного предложения, соединяя условие и заключение словами «тогда и только тогда».

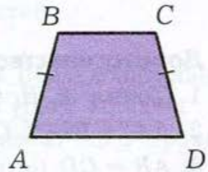


Рис. 10.8

Например, предложения 2 и 2_1 можно сформулировать так: Четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно равны.

§ 10.5 ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Фалес Милетский

Теорема, которую мы сейчас рассмотрим, носит имя одного из величайших мыслителей Древней Греции, родоначальника античной философии и науки, основателя Милетской школы Фалеса Милетского (625–547 до н.э.). Фалесу Милетскому принадлежит ряд открытий в различных областях науки.

Теорема 44 (теорема Фалеса). Пусть через точки A, B, C, D, расположенные на одной стороне угла, проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону этого угла в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Тогда если равны отрезки AB и CD, то равны и отрезки A_1B_1 и C_1D_1.

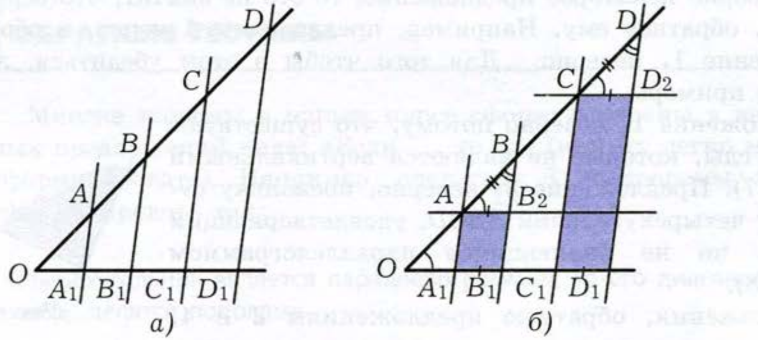


Рис. 10.9

Доказательство

1. Точки A, B, C, D расположены на стороне угла O. (дано)
2. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. (рис. 10.9а)
3. $AB = CD$.
4. $A_1B_1 = C_1D_1$ (требуется доказать).

Для доказательства п. 4 можно построить фигуры, в которых отрезки A_1B_1 и C_1D_1 были бы равными сторонами.

5. Проведём через точки A и C прямые, параллельные другой стороне угла O (построение) (рис. 10.9б).

6. Получились два четырёхугольника $AB_2B_1A_1$ и $CD_2D_1C_1$ (1, 5).

7. Четырёхугольники $AB_2B_1A_1$ и $CD_2D_1C_1$ — параллелограммы (1, 2, 5, 6, определение параллелограмма).

8. $AB_2 = A_1B_1$ и $CD_2 = C_1D_1$ (7, свойство параллелограмма).

Для доказательства теоремы нам достаточно доказать равенство отрезков AB_2 и CD_2. Для этого можно рассмотреть треугольники ABB_2 и CDD_2 (рис. 10.9б).

9. $AB = CD$ согласно условию теоремы; $\angle ABB_2 = \angle CDD_2$ как соответственные, образовавшиеся при пересечении параллельных BB_1 и DD_1 прямой BD; точно так же каждый из углов BAB_2 и DCD_2 оказывается равным данному углу с вершиной O, а значит, $\triangle ABB_2 = \triangle CBB_2$.

10(4). $A_1B_1 = C_1D_1$ (3, 9, определение равных треугольников). ■

Используя теорему Фалеса, мы можем легко разделить любой отрезок на любое число равных отрезков.

Задача

Разделить данный отрезок OA на пять равных отрезков.

Решение

1. Отрезок OA (дан) (рис. 10.10а).

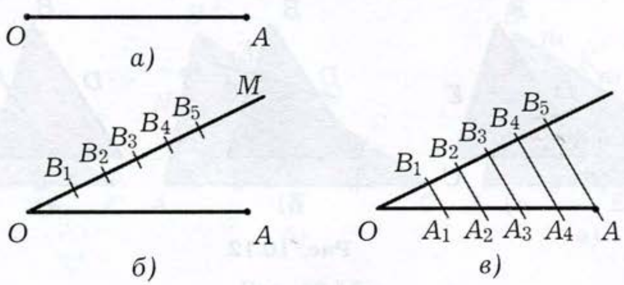


Рис. 10.10

2. Требуется разделить отрезок OA на пять равных частей. Воспользуемся теоремой Фалеса.

3. Проведём через точку O луч OM и отложим на нём последовательно пять равных отрезков: $OB_1 = B_1B_2 = ... = B_4B_5$ (построение) (рис. 10.10б).

4. Проведём прямую AB_5 и прямые, параллельные прямой AB_5, проходящие через точки B_1, B_2, B_3 и B_4 (построение) (рис. 10.10в).

5(2). Эти прямые разделят отрезок OA на пять равных отрезков (1, 2, 3, Т.44). ■

Используя свойства параллелограмма и теорему Фалеса, рассмотрим свойства *средней линии треугольника*.

Определение 46. Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

На рис. 10.11 изображён $\triangle ABC$, у которого $AM = MB$ и $CN = NB$. Отрезок MN — средняя линия $\triangle ABC$.

Докажем теорему.

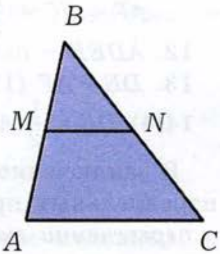


Рис. 10.11

Теорема 45. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне, а её длина равна половине длины третьей стороны.

Доказательство

1. ABC — треугольник.
2. DE — средняя линия треугольника. } (дано) (рис. 10.12а)

3. $DE \parallel AC$.
4. $DE = \frac{1}{2} AC$. } (требуется доказать)

Из данных теоремы можно сделать вывод:

5. $AD = DB$ и $CE = EB$ (1, 2, определение средней линии треугольника).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

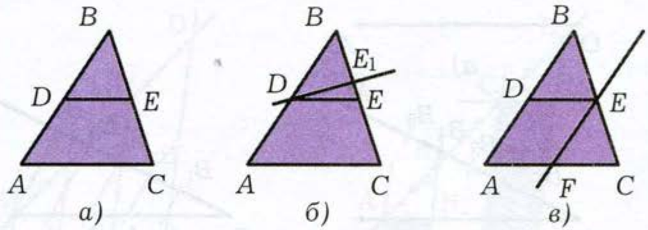


Рис. 10.12

6. Предположим, что DE не параллельна AC.

Проведём через точку D прямую DE_1, параллельную стороне AC треугольника ABC (построение) (рис. 10.12б).

7. Проведённая прямая разделит отрезок BC пополам, т.е. пройдёт через точку E (5, 6, теорема Фалеса).

8. Проведённая прямая DE_1 совпадёт с прямой DE, так как каждая из них проходит через точки D и E, а через две различные точки проходит единственная прямая.

9(3). $DE \parallel AC$ (2, 6, 8).

Докажем истинность п. 4.

10. Проведём $EF \parallel AB$ (построение) (рис. 10.12в).

11. Прямая EF разделит отрезок AC пополам:

$AF = FC = \frac{1}{2} AC$ (10, теорема Фалеса).

12. $ADEF$ – параллелограмм (3, 10, признак параллелограмма).

13. $DE = AF$ (12).

14(4). $DE = \frac{1}{2} AC$ (13). ■

В заключение этого параграфа покажем ещё одно применение свойств параллельных прямых и теоремы Фалеса — для доказательства *теоремы о пересечении медиан треугольника.*

Теорема 46. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство

1. ABC — треугольник.
2. AD и BE — две его медианы.
3. O — точка пересечения медиан AD и BE.

(дано) (рис. 10.13а)

Замечание. Тот факт, что две медианы треугольника пересекаются в одной точке, также нуждается в доказательстве. Проведите его самостоятельно.

Можно предложить такую стратегию доказательства.

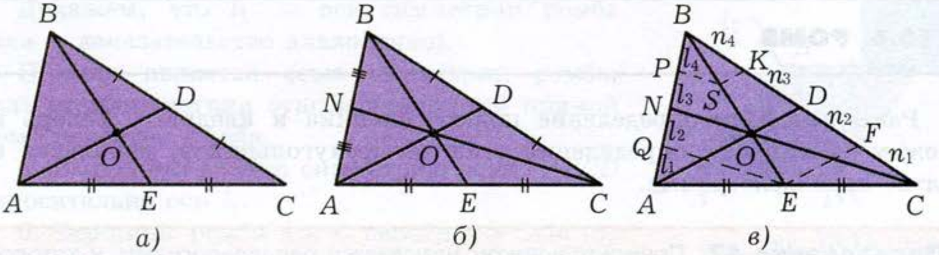


Рис. 10.13

4. Отрезок CN, проходящий через вершину C этого треугольника и точку O, будет также медианой, то есть $AN = NB$ (требуется доказать) (рис. 10.13б).

Используем идеи, заложенные в теореме Фалеса, для этого выполним некоторые дополнительные построения.

5. Через точку E проведём $EF \parallel AD$ (построение) (рис. 10.13в).
6. $CF = FD$ (5, теорема Фалеса).
7. Разделим отрезок BD пополам: $DK = KB$ (построение) (рис. 10.13в).
8. $BK = KD = DF = FC$ как половины равных отрезков CD и BD (1, 5, 6, 7).
9. Через точку K проведём $KS \parallel AD$ (построение) (рис. 10.13в).
10. $BS = SO = OE$ (4, 8, 9, теорема Фалеса).
11. Через точки S и E проведём $SP \parallel ON$ и $EQ \parallel ON$ (построение) (рис. 10.13в) (10).
12. $BP = PN = NQ$ (10, 11, теорема Фалеса).
13. $NQ = QA$ (2, 11, теорема Фалеса).
14. $BP = PN = NQ = QA$ (12, 13).
15. $BP + PN = BN$, $NQ + QA = NA$ (14).
16. $BN = NA$ (14, 15).
17(2). NC — медиана треугольника ABC (16, определение медианы).

Таким образом, все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. ■

Кроме того, на рис. 10.13в мы видим, что отрезок OE составляет $\frac{1}{3}$ BE.

Аналогично можно доказать, что отрезок ON составляет $\frac{1}{3}$ CN и отрезок OD составляет $\frac{1}{3}$ AD.

Следовательно,

! Точка пересечения медиан в треугольнике отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

§ 10.6 РОМБ

Ранее мы дали определение прямоугольника и квадрата. Теперь мы можем дать другие определения этих четырёхугольников, используя понятие параллелограмма.

Определение 47. Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Определение 48. Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Определим новый для нас четырёхугольник — *ромб*.

Определение 49. Параллелограмм, все стороны которого равны, называется ромбом.

На рис. 10.14 изображён ромб $ABCD$, у которого $AB = BC = CD = DA$.

Как вы думаете, какой из известных вам четырёхугольников является ромбом?

Ответ прост — это квадрат.

Так как ромб является параллелограммом, он обладает всеми свойствами параллелограмма. Перечислите их.

Кроме того, у ромба есть и другие свойства.

Прежде всего ответим на вопрос:

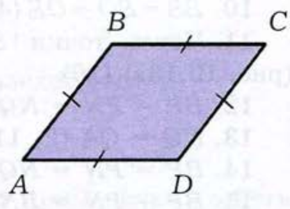


Рис. 10.14

Есть ли у ромба центры и оси симметрии?

Ромб — параллелограмм, значит, у него есть центр симметрии. На вторую часть вопроса даёт ответ теорема.

Теорема 47. Прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. } ABCD \text{ — ромб, } AB = BC = CD = DA.\\ \text{2. } AC \text{ и } BD \text{ — диагонали ромба.}\\ \text{3. } l_1 \text{ и } l_2 \text{ — прямые, которым принадлежат диагонали ромба.}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{(дано)}\\ \text{(рис. 10.15)}\end{array}$$

4. l_1 и l_2 — оси симметрии ромба (требуется доказать).

Докажем, что l_1 — ось симметрии ромба (для l_2 доказательство аналогично).

Прямая является осью симметрии ромба, если при симметрии относительно этой прямой ромб перейдёт в себя.

5. Выполним осевую симметрию ромба $ABCD$ относительно оси l_1.

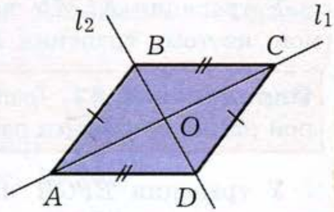


Рис. 10.15

6. Вершины ромба A и C перейдут в себя (5, свойство осевой симметрии).

7. Так как $CB = CD$, то по Т.15 точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BD. А поскольку прямая AC проходит через середину O отрезка BD, то она и является этим серединным перпендикуляром, т.е. $AC \perp BD$.

8. Так как $BO = OD$ (свойство диагоналей параллелограмма), то вершины B и D перейдут друг в друга (1, 5, Т.15).

9. Таким образом, вершины ромба $ABCD$ при осевой симметрии с осью l_1 перейдут: $A \to A$, $B \to D$, $C \to C$, $D \to B$ (знак «$\to$» обозначает «перейдёт») (6, 8).

10(3). Ромб $ABCD$ перейдёт в себя, и l_1 — его ось симметрии (5, 9). ■

Диагонали ромба обладают двумя важными свойствами:

!

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.

Свойство 1 доказано в пункте 7 теоремы 47. Свойство 2 докажите самостоятельно.

§ 10.7 ТРАПЕЦИЯ

Познакомимся с ещё одним видом четырёхугольников — *трапецией*.

Определение 50. Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие непараллельны, называется трапецией.

На рис. 10.16 изображена трапеция $ABCD$. Параллельные стороны трапеции называются её *основаниями*, а непараллельные — *боковыми сторонами*. На рис. 10.16 отрезки BC и AD являются основаниями трапеции $ABCD$, AB и CD — боковыми сторонами.

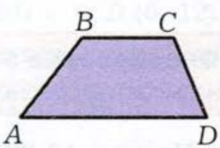


Рис. 10.16

Определение 51. Трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной.

У трапеции $KLMN$ на рис. 10.17 угол K — прямой, поэтому трапеция $KLMN$ — прямоугольная.

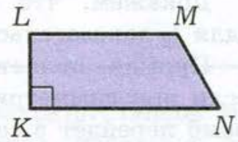


Рис. 10.17

Определение 52. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной.

У трапеции $EFGH$ на рис. 10.18 $EF = GH$, значит, трапеция $EFGH$ — равнобедренная.

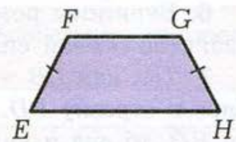


Рис. 10.18

Докажем теорему.

Теорема 48. В равнобедренной трапеции углы при основании равны.

Доказательство

1. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, т.е. $BC \parallel AD$, $AB = CD$. } (дано) (рис. 10.19а)
2. $\angle BAD = \angle CDA$ (требуется доказать).

Вспомним, что углы при основании равны в равнобедренном треугольнике.

3. Проведём дополнительное построение, чтобы получить равнобедренный треугольник.
4. Проведём отрезок BE параллельно стороне CD (построение) (рис. 10.19б).
5. $BCDE$ — параллелограмм (1, 4, определение параллелограмма).
6. $BE = CD$ (5, следствие из Т.40).
7. $AB = BE$ (1, 6).
8. Треугольник ABE — равнобедренный (7, определение равнобедренного треугольника).
9. $\angle BAE = \angle BEA$ (8, свойство углов при основании равнобедренного треугольника).
10. $\angle BEA = \angle CDA$ (4, свойство углов, образованных при пересечении двух параллельных секущей).

11(2). $\angle BAD = \angle CDA$ (9, 10). ■

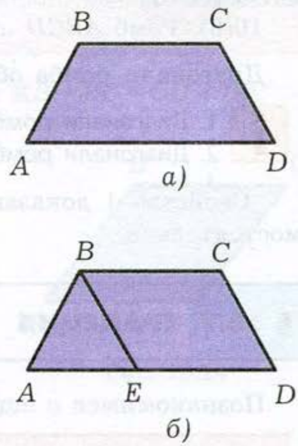


Рис. 10.19

Определение 53. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется средней линией трапеции.

На рис. 10.20а точки M и E — середины боковых сторон трапеции. Значит, ME — средняя линия трапеции $ABCD$.

Докажем теорему.

Теорема 49. Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а её длина равна полусумме длин оснований трапеции.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l}1.\ ABCD \text{ — трапеция.}\\ 2.\ ME \text{ — средняя линия трапеции } ABCD.\end{array}\right\}\text{(дано) (рис. 10.20а)}$$

$$\left.\begin{array}{l}3.\ ME \parallel AD.\\ 4.\ ME=\dfrac{AD+BC}{2}.\end{array}\right\}\text{(требуется доказать).}$$

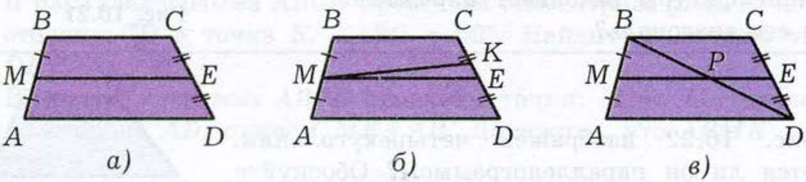


Рис. 10.20

Докажем п. 3. На основании данных теоремы имеем:

5. $AD \parallel BC$ (1).

6. $AM = MB$, $CE = ED$ (2).

7. Проведём через середину M стороны AB трапеции прямую MK, параллельную основаниям AD и BC (построение) (рис. 10.20б).

Если прямая MK совпадает с прямой ME, то теорема доказана.

8. Прямая MK пройдёт через середину отрезка CD, т.е. через точку E (2, 7, теорема Фалеса).

9. Прямая ME совпадает с прямой MK, так как каждая из них проходит через точки M и E, а через две различные точки проходит единственная прямая (7, 8).

10(3). ME параллельна основаниям трапеции (9).

Докажем п. 4. Воспользуемся свойствами средней линии треугольника.

11. Проведём диагональ BD и обозначим точку её пересечения со средней линией через P (построение) (рис. 10.20в).

12. Точка P — середина отрезка BD (11, теорема Фалеса).

13. Отрезки PM и PE — средние линии треугольников ABD и BCD (6, 12).

14. $PE = \frac{1}{2} BC$, $PM = \frac{1}{2} AD$ (13, свойства средней линии треугольника).

15(4). $ME = MP + PE = \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (BC + AD)$ (12). ■

Развиваем умения

К § 10.1–10.3

Н ⇓

1 ● На рис. 10.21 изображён параллелограмм $ABCD$. Сколько у параллелограмма: а) вершин; б) сторон; в) углов; г) диагоналей?

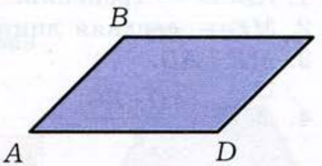


Рис. 10.21

2 ● На какие фигуры разбивает параллелограмм его диагональ?

Н ⇑

3 ● На рис. 10.22 изображён четырёхугольник. Является ли он параллелограммом? Обоснуйте свой ответ.

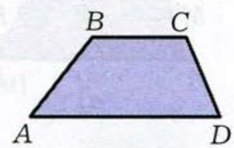


Рис. 10.22

4 ● Может ли диагональ параллелограмма равняться его стороне?

5 ● Диагональ параллелограмма разбивает его на два треугольника. Что можно сказать о периметрах этих треугольников?

6 ● Всегда ли одна диагональ параллелограмма больше другой?

7 ● Верны ли следующие утверждения:

а) четырёхугольник является параллелограммом, если две противоположные стороны его параллельны;

б) четырёхугольник является параллелограммом, если его стороны попарно параллельны?

Н

8 В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 7$ см. Найдите стороны CD, AD и периметр параллелограмма.

9 Выразите сторону параллелограмма b через его периметр P и другую сторону a.

10 Периметр параллелограмма равен 60 см. Найдите стороны параллелограмма, если:

а) одна из сторон параллелограмма равна 13 см;

б) одна сторона параллелограмма на 4 см больше другой стороны;

в) одна сторона параллелограмма в 3 раза меньше другой стороны;

г) разность двух сторон параллелограмма равна 7 см;

д) стороны относятся как 1 : 3.

11 Могут ли все углы параллелограмма быть: а) острыми; б) тупыми; в) прямыми? Может ли только один угол параллелограмма быть прямым?

12 Один из углов параллелограмма равен 55°. Найдите его остальные углы.

13 Найдите все углы параллелограмма, если:

а) разность двух углов параллелограмма равна 44°;

б) один угол параллелограмма в 4 раза больше другого угла;

в) углы параллелограмма относятся как 2 : 3.

14 Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы в 30° и 50°. Найдите все углы этого параллелограмма.

15 В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла B, пересекающая сторону CD в точке K. $\angle ABC = 60°$. Найдите величины углов CKB и DKB.

16 В параллелограмме $ABCD$ отмечены точки: M — на стороне BC и K — на стороне AD, причём $MK \parallel AB$. Докажите, что $ABMK$ — параллелограмм.

П

17 Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что её отрезок, заключённый между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.

18 Диагональ параллелограмма делит его на два треугольника со сторонами 2 см, 3 см и 4 см. Найдите периметр этого параллелограмма. Сколько решений имеет задача? Покажите их на чертеже.

19 В параллелограмме $ABCD$ биссектриса AM угла BAD отсекает $\triangle ABM$, $\angle BAM = 25°$. Найдите все углы параллелограмма.

20 Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 10.23). На его сторонах AB и CD взяты такие точки M и N, что $DM = BN$. Обязательно ли четырёхугольник $MDNB$ является параллелограммом?

21 На продолжениях противоположных сторон параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AN и CM и проведены отрезки DM и NB (рис. 10.24). Докажите, что полученный четырёхугольник $NBMD$ является параллелограммом.

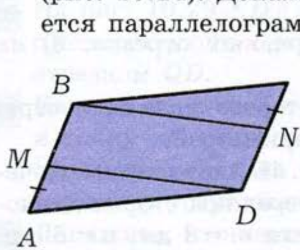


Рис. 10.23

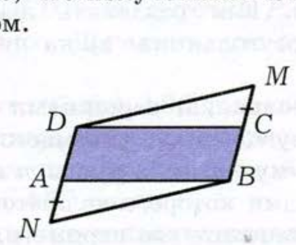


Рис. 10.24

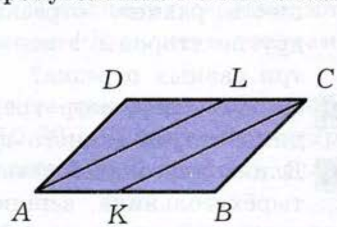


Рис. 10.25

22 Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 10.25). $AK = CL$. Докажите, что точки A, K, C, L являются вершинами параллелограмма.

М

23 Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько при этом получилось параллелограммов?

24 Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трёх заданных точках, не лежащих на одной прямой? Постройте их.

25 Сколько разных параллелограммов можно получить из двух равных треугольников, прикладывая их друг к другу различным образом?

26 Можно ли параллелограмм разрезать на: а) 4 равных параллелограмма; б) 5 равных параллелограммов; в) 4 равных треугольника; г) 6 равных треугольников?

К § 10.5

Н ⇓

27 • В $\triangle ABC$ MK — средняя линия (рис. 10.26). Назовите равные отрезки на этом рисунке.

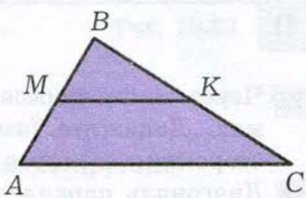


Рис. 10.26

Н ⇑

28 • На рис. 10.27 изображён угол O и две параллельные прямые A_1B_1 и A_2B_2. $OA_1 = A_1A_2$. Есть ли на этом рисунке другие пары равных отрезков?

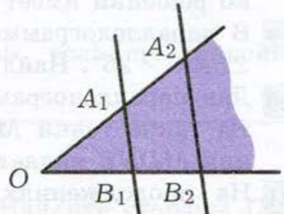


Рис. 10.27

Н

29 Разделите данный отрезок: а) на три равных отрезка; б) на четыре равных отрезка.

30 Одна из сторон треугольника разделена на шесть равных отрезков. Как разделить две другие стороны этого треугольника: а) на два равных отрезка; б) на три равных отрезка?

31 Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника, имеющего периметр P.

32 Длины диагоналей четырёхугольника равны m и n. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника. Вычислите его периметр, если $m = 3$ дм, $n = 8$ см.

33 Постройте треугольник, если заданы середины его сторон.

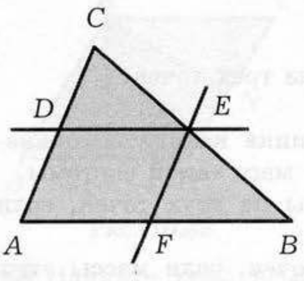


Рис. 10.28

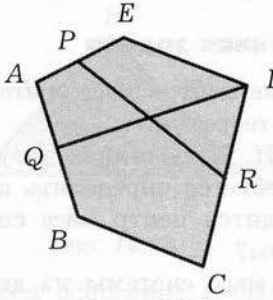


Рис. 10.29

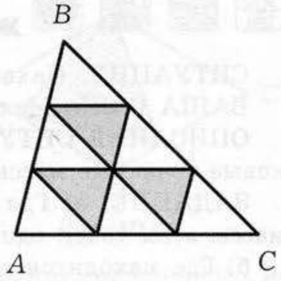


Рис. 10.30

П

34 Внутри угла ABC дана точка D. Проведите через точку D прямую так, чтобы отрезок её, отсекаемый сторонами угла: а) делился в точке D пополам; б) делился в точке D в отношении $1 : 2$.

35 На рис. 10.28 $DE \parallel AB$, $EF \parallel AC$ и D — середина отрезка AC. Докажите, что $\triangle CDE = \triangle EFB$.

36 Используя свойства средней линии треугольника, найдите расстояние между двумя недоступными точками A и B.

37 Найдите расстояние до недоступной точки, используя свойство средней линии треугольника.

М

38 Даны угол AOB и точка M вне его. Проведите через точку M прямую, пересекающую стороны угла AOB в точках C и K так, чтобы отрезок MK делился точкой C пополам.

39 Даны две произвольные прямые. На первой из них взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1, а на второй – точки A_2, B_2, C_2, D_2 так, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 параллельны между собой. Докажите, что если $A_1B_1 = C_1D_1$, то $A_2B_2 = C_2D_2$.

40 На рис. 10.29 $ED \parallel BC$, $ED = BC$ и точки P, Q, R являются серединами соответствующих отрезков. Докажите, что отрезок PR делится пополам отрезком QD.

41 Каждая из сторон треугольника ABC разделена на три равных отрезка, и точки деления соединены отрезками (рис. 10.30). Найдите периметр образовавшейся на этом рисунке звёздочки (выделенной цветом), если периметр треугольника ABC равен P.

42 Докажите, что вершины треугольника находятся на равном расстоянии от прямой, на которой лежит средняя линия этого треугольника.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Нахождение центра масс системы из трёх точек.

ВАША РОЛЬ. Механик-теоретик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. В вершинах треугольника находятся одинаковые точечные массы. Требуется определить центр масс такой системы.

ЗАДАНИЕ: а) Где находится центр масс системы из двух точек, если массы этих точек одинаковы?

б) Где находится центр масс системы из двух точек, если массы этих точек равны m_1 и m_2 ($m_1 \neq m_2$)?

в) Где находится центр масс системы из трёх точек – вершин треугольника, если массы этих точек одинаковы?

г) Какая имеется связь между этой задачей и теоремой 46 о точке пересечения медиан треугольника и следствием из неё?

К § 10.6

Н ⇓

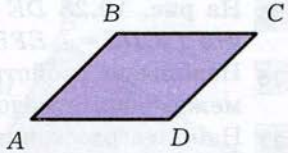


Рис. 10.31

43 На рис. 10.31 изображён ромб $ABCD$. Назовите: а) его равные стороны; б) его равные углы; в) его диагонали; г) его центр симметрии; д) его оси симметрии.

Н ⇑

44 Может ли длина стороны ромба равняться половине длины его диагонали?

45 Существует ли точка, равноудалённая: а) от всех вершин ромба; б) от всех сторон ромба?

46 Приведите примеры, опровергающие высказывания:

а) если диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны, то этот четырёхугольник является ромбом;

б) если диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны и равны, то этот четырёхугольник является ромбом.

47 Как проверить, является ли вырезанный из картона четырёхугольник ромбом?

Н

48 Сторона ромба равна 2 см. Найдите периметр этого ромба.

49 Вычислите периметр ромба, один из углов которого равен 60°, а длина меньшей диагонали равна 8 см.

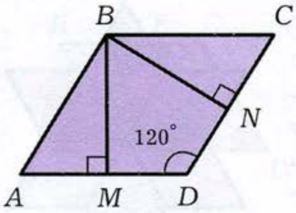


Рис. 10.32

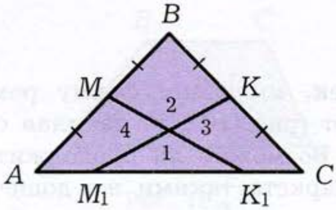


Рис. 10.33

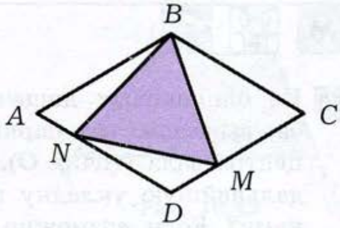


Рис. 10.34

50 Найдите углы ромба, если основание перпендикуляра, опущенного из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

51 Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

52 Докажите, что если каждая диагональ четырёхугольника делит пополам два его угла, то этот четырёхугольник является ромбом.

53 Постройте ромб: а) по стороне и диагонали; б) по диагоналям; в) по стороне и углу; г) по диагонали и углу.

54 Сторона ромба $ABCD$ (рис. 10.32) равна 2 см, $\angle D = 120°$.

а) Найдите расстояния AM, MD, BD.

б) Докажите, что $\triangle MBN$ равносторонний.

П

55 Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и две соседние вершины.

56 Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и середины двух смежных сторон.

М

57 Постройте ромб по сумме диагоналей и одному из углов.

58 В равнобедренном треугольнике ABC отмечены середины боковых сторон M и K и их проекции на основание M_1 и K_1 (рис. 10.33). Через отмеченные точки проведены две прямые MK_1 и KM_1. Покажите, как из полученных частей 1, 2, 3 и 4 можно сложить ромб.

59 В ромбе $ABCD$ угол A равен 60°. Докажите, что если один из углов треугольника BMN (рис. 10.34) равен 60°, то остальные тоже равняются 60°.

60 Из одинаковых дощечек, имеющих форму ромба, выкладывают паркет (рис. 10.35), начиная от центра зала (точка O). Возможно ли продолжить дальнейшую укладку паркета такими же дощечками? Если возможно, то укажите углы ромбов и наметьте варианты дальнейшей укладки.

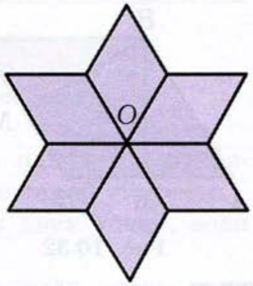


Рис. 10.35

К § 10.7

61 На рис. 10.36 изображена трапеция $ABCD$. Укажите параллельные и непараллельные стороны трапеции.

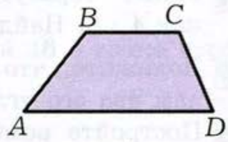


Рис. 10.36

62 На сколько треугольников делит трапецию её диагональ?

63 На рис. 10.37 изображена трапеция $ABCD$. MN — её средняя линия. Укажите на рисунке равные отрезки.

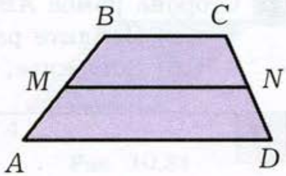


Рис. 10.37

64 Какие фигуры на рис. 10.38 являются трапециями?

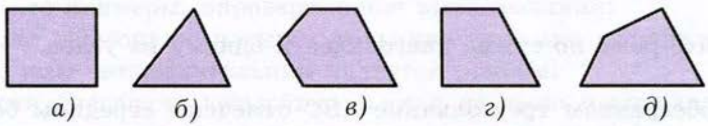


Рис. 10.38

65 В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD (рис. 10.39).

а) Укажите на этом рисунке равные углы.

б) На сколько треугольников разбивают трапецию её диагонали?

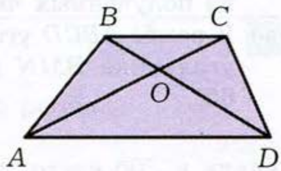


Рис. 10.39

66 Может ли в равнобедренной трапеции быть три равных стороны?

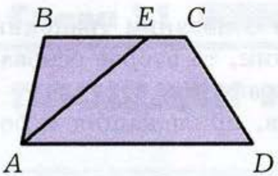


Рис. 10.40

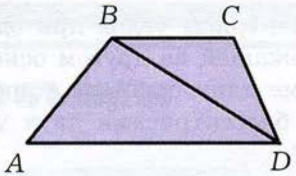


Рис. 10.41

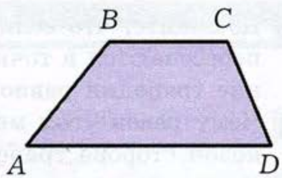


Рис. 10.42

Н

67 $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD. $BC = 4$ см, $AD = 8$ см. Найдите длину средней линии трапеции.

68 Чему равна сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции?

69 Чему равна сумма всех углов трапеции?

70 Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

71 В трапеции $ABCD$ проведена биссектриса угла A. Какую из сторон трапеции пересекает эта биссектриса? Рассмотрите все возможные случаи.

72 На рис. 10.40 изображена трапеция $ABCD$. AE является биссектрисой угла A. Укажите на рисунке равные между собой углы.

П

73 На рис. 10.41 изображена трапеция $ABCD$ и её диагональ BD. Как построить отрезок, равный сумме оснований трапеции?

74 В трапеции $ABCD$ сторона AB равна стороне BC. Докажите, что диагональ AC является биссектрисой угла A.

75 Периметр равнобедренной трапеции равен 28 см, большее основание равно 10 см. Диагональ трапеции делит её острый угол пополам. Найдите длину меньшего основания трапеции.

76 EF — средняя линия трапеции $ABCD$, в которой $\angle A = 70°$, $\angle D = 80°$. Найдите величины углов BEF и CFE.

77 На рис. 10.42 изображена трапеция $ABCD$. Постройте отрезок, равный разности большего и меньшего оснований.

М

78 Докажите, что сумма боковых сторон трапеции больше разности её оснований.

79 Докажите, что сумма диагоналей трапеции больше суммы её оснований.

80 Докажите, что если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются в точке, лежащей на другом основании, то второе основание трапеции равно сумме длин боковых сторон трапеции.

81 Чему равен угол между биссектрисами двух углов, прилежащих к боковой стороне трапеции?

82 Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то трапеция является равнобедренной.

83 Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.

84 Докажите, что если диагонали трапеции равны, то трапеция является равнобедренной.

85 Докажите, что середина диагонали трапеции принадлежит средней линии трапеции.

86 Докажите, что диагонали трапеции делят её среднюю линию на три отрезка, крайние из которых равны между собой и каждый из них равен половине меньшего основания, а средний равен полуразности оснований.

87 В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основанием $AD=a$ и $BC=b$ $(a>b)$ проведена высота BE. Докажите, что $AE=\dfrac{a-b}{2}$; $ED=\dfrac{a+b}{2}$.

88 Боковая сторона трапеции с основаниями a и b $(a>b)$ разделена на три равные части и через полученные точки проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите длины отрезков этих прямых, заключённых внутри трапеции.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Восстановление квадрата по одной известной точке на каждой из его сторон.

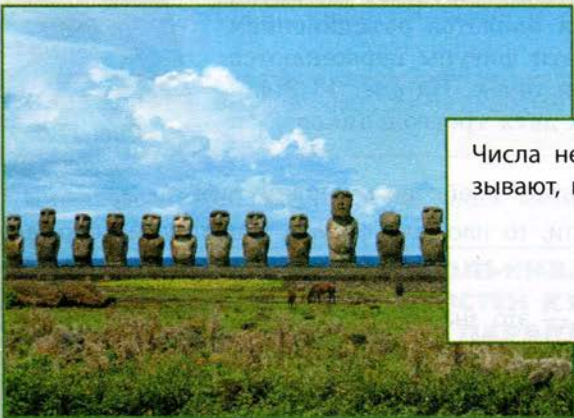
ВАША РОЛЬ. Археолог.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Из древней рукописи известно, что из одинаковых круглых плиток, расположенных одна рядом с другой в один ряд, в дворцовом саду был выложен контур квадрата. При раскопках было обнаружено по одной плитке от каждой стороны квадрата.

ЗАДАНИЕ. Восстановите расположение квадрата.

Глава 11

ПЛОЩАДИ И ОБЪЁМЫ



Числа не управляют миром, но они показывают, как управляется мир.

Иоганн Вольфганг Гёте
(немецкий писатель, мыслитель и естествоиспытатель, 1749–1832)

Открываем новые знания

§ 11.1 ЗНАКОМСТВО С ПЛОЩАДЯМИ ФИГУР

Вам наверняка уже приходилось измерять площади — площадь пола в комнате или площадь садового участка.

? Что же математики понимают под площадью? Как её измеряют?

Прежде всего следует понять, площади каких фигур мы будем находить. В школьном курсе геометрии мы будем в первую очередь вычислять площади *простых фигур* — фигур, которые можно разбить на конечное число треугольников. Главным примером простой фигуры является выпуклый многоугольник (рис. 11.1).

Площадь фигуры мы будем обозначать буквой S. Запись S_F читается так: «площадь фигуры F».

Площадь многоугольника — это величина, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. Всякий многоугольник F имеет площадь S_F. Площадь является величиной, численное значение которой положительно, т.е. $S_F > 0$ для любого многоугольника F.

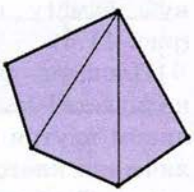


Рис. 11.1

Площадь фигуры зависит только от её размеров и формы и не зависит от места расположения фигуры в пространстве. Мы сформулируем это свойство так:

2. Если две фигуры равны, то равны и их площади.

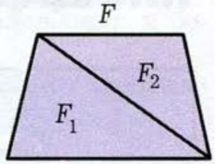


Рис. 11.2

Чтобы сформулировать следующее свойство площади, рассмотрим фигуру F, которая является объединением двух фигур F_1 и F_2, причём эти фигуры пересекаются по конечному числу отрезков и точек. На рис. 11.2 фигура F является объединением двух треугольников F_1 и F_2. Тогда $S_F = S_{F_1} + S_{F_2}$.

Сформулируем соответствующее свойство площади так:

3. Если фигура разбита на части, то площадь фигуры равна сумме площадей частей фигуры.

! Измерить площадь фигуры — это значит сравнить её с площадью некоторой фигуры, принятой за единицу измерения площади.

Возникает вопрос:

? Что следует принять за единицу измерения площади?

Ответ на этот вопрос формулируется как ещё одно важное свойство измерения площади:

4. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата, сторона которого равна единице измерения длины.

Если за единицу длины принимается 1 мм, то единицей площади является 1 мм^2 (квадратный миллиметр); при единице длины 1 см единицей измерения площади является 1 см^2 (квадратный сантиметр). Если за единицу измерения длины берётся 1 м, то ей соответствует единица площади 1 м^2 (квадратный метр).

Площадь многоугольника S можно выразить через единицу измерения площади с помощью некоторого положительного числа, скажем, $S = 15$ см^2.

Нанесём квадратную сетку на прозрачную бумагу и наложим её на фигуру F (рис. 11.3).

Площадь фигуры будет не меньше, чем количество квадратиков сетки, лежащих целиком внутри фигуры, и не больше, чем количество клеток, имеющих с фигурой общие точки. Такая сетка называется *палеткой*.

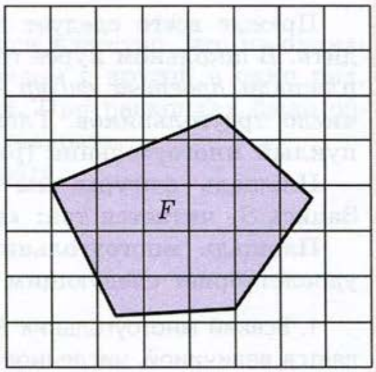


Рис. 11.3

Можно доказать, что из рассмотренных выше свойств 1–4 следует, что площадь квадрата со стороной a равна a^2:

$$S_{\text{квадр.}} = a^2.$$

Разумеется, здесь имеется в виду, что единица измерения длины и единица измерения площади согласованы, как сказано выше в свойстве 4. Скажем, если сторона квадрата равна a см, то площадь этого квадрата равна a^2 см^2.

Определение 54. Две фигуры называются равновеликими, если они имеют одинаковую площадь.

С равновеликими фигурами мы будем часто встречаться при решении задач.

§ 11.2 ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУБА И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Выведем формулу для нахождения площади прямоугольника.

Теорема 50. Площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон: $S_{\text{пр.}} = a \cdot b$,
где a и b — стороны данного прямоугольника.

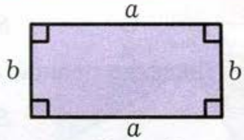
Доказательство

1. Дан прямоугольник со сторонами a и b (рис. 11.4а).
2. $S_{\text{пр.}} = ab$ (требуется доказать).

Эту формулу мы выведем, пользуясь основными свойствами площадей. Удобно было бы связать данный прямоугольник с некоторыми квадратами. Это можно сделать, например, как показано на рис. 11.4б.

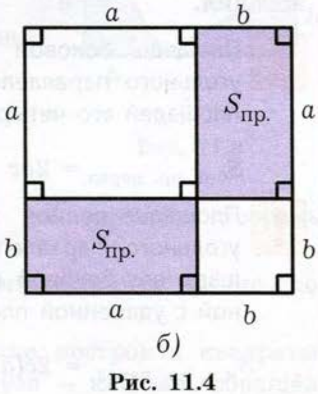
3. Построим на двух смежных сторонах данного прямоугольника по квадрату, а затем построим большой квадрат (построение) (рис. 11.4б).
4. Обозначим площадь интересующего нас прямоугольника $S_{\text{пр.}}$.

Используя свойства площади, мы получим:
5. $a^2 + 2S_{\text{пр.}} + b^2 = (a + b)^2$ (1, 4, свойства площади).



$S_R = ab$

а)



б)

Рис. 11.4

6. $a^2 + 2S_{\text{пр.}} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (5).

7(2). $S_{\text{пр.}} = ab$ (6). ■

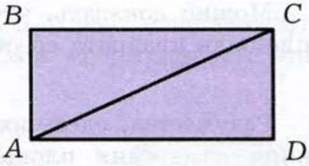


Рис. 11.5

Проведём диагональ AC прямоугольника $ABCD$ (рис. 11.5). Мы легко можем доказать, что она разбивает этот прямоугольник на два равных треугольника ABC и CDA (докажите это самостоятельно). После этого нетрудно доказать такую теорему:

Теорема 51. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов:

$S_{\text{пр. треуг.}} = \frac{1}{2}\, a \cdot b$, где a и b — катеты треугольника (рис. 11.6).

Докажите эту теорему самостоятельно.

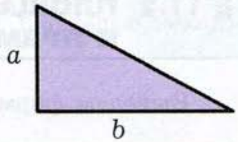


Рис. 11.6

Мы уже довольно много знаем о кубе и прямоугольном параллелепипеде. Их гранями являются квадраты и прямоугольники, площади которых мы умеем находить.

Различают *боковую поверхность* этих многогранников и их *полную поверхность*. Рассмотрим куб с ребром a (рис. 11.7).

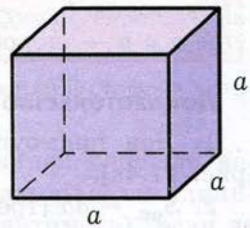


Рис. 11.7

! Площадь боковой поверхности куба равна $4a^2$:

$$S_{\text{б.п. куба}} = 4a^2.$$

! Площадь полной поверхности куба равна $6a^2$:

$$S_{\text{п.п. куба}} = 6a^2.$$

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с рёбрами a, b, c (рис. 11.8), у него a и b — стороны основания.

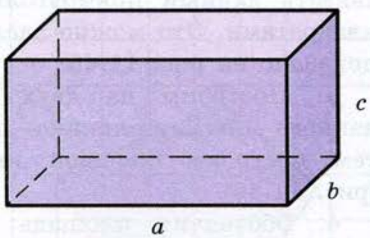


Рис. 11.8

! Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда равна сумме площадей его четырёх боковых граней:

$$S_{\text{б.п. пр. парал.}} = 2ac + 2bc = 2c(a + b).$$

! Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна площади его боковой поверхности, сложенной с удвоенной площадью основания параллелепипеда:

$$S_{\text{п.п. пр. парал.}} = 2c(a + b) + 2ab = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab).$$

§ 11.3 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Понятие площади и формулы вычисления площадей квадрата и прямоугольника дают нам возможность доказать одну из самых великих теорем геометрии — *теорему Пифагора*.

Пифагор

Теорема 52. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доказательство

1. Дан прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c (дано) (рис. 11.9а).

2. $c^2 = a^2 + b^2$ (требуется доказать).

3. Выполним построения, показанные на рис. 11.9б.

4. Мы получили квадрат со стороной $a + b$ (1, 3).

Используя формулы нахождения площадей квадрата и свойства площади, можно сделать следующие выводы.

5. Площадь большого квадрата равна $(a+b)^2$ (1, 3, 4, формула площади квадрата).

6. Площадь большого квадрата равна сумме площадей четырёх прямоугольных треугольников с катетами a и b и площади квадрата со стороной c (1, 3, свойства измерения площадей).

7. Площадь каждого прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{2}ab$ (1, Т.51).

8. $S_{\text{квадр.}} = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$ (6, 7, формула площади квадрата).

9. $(a+b)^2 = 2ab + c^2$ (5, 8).

10(2). $a^2 + b^2 = c^2$ (9). ■

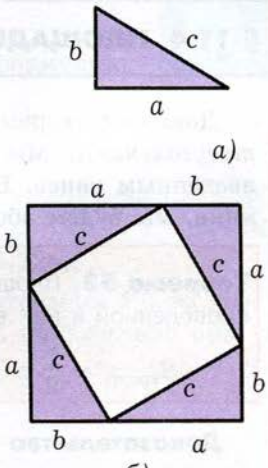
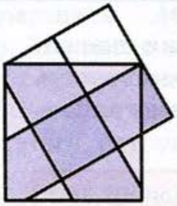


Рис. 11.9

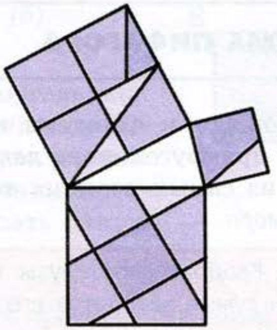
Мы привели одно из многих существующих доказательств теоремы Пифагора.

Предложим несколько построений, позволяющих получить другие способы доказательства этой теоремы.

На катетах прямоугольного треугольника можно построить квадраты, обращённые «внутрь треугольника», а на гипотенузе — квадрат, обращён-



а)



б)

Рис. 11.10

ный «наружу» (рис. 11.10а). Найдите равновеликие фигуры и обозначьте их одинаковыми буквами или цифрами. Осталось только увидеть равенство нужных для доказательства площадей.

Можно также построить квадраты на катетах «внешним» образом и найти равновеликие фигуры (рис. 11.10б).

§ 11.4 ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Докажем теорему, которая даёт нам формулу *площади произвольного треугольника*. Мы будем пользоваться понятием высоты треугольника, введённым ранее. Высоту, проведённую, например, к стороне c треугольника, мы будем обозначать h_c.

Теорема 53. Площадь треугольника равна половине произведения стороны и проведённой к ней высоты:

$$S_{\text{треуг.}} = \frac{1}{2} c \cdot h_c,$$ где c — стороны треугольника, h_c — его высота.

Доказательство

1. Треугольник ABC со сторонами a, b, c и высотой h_c (дано) (рис. 11.11).

2. $S_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ (требуется доказать).

Возможны три случая расположения точки D — основания высоты $\triangle ABC$.

Случай 1. Точка D совпадает с одним из концов основания c, например с точкой A (рис. 11.12а).

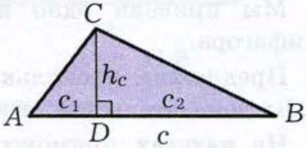


Рис. 11.11

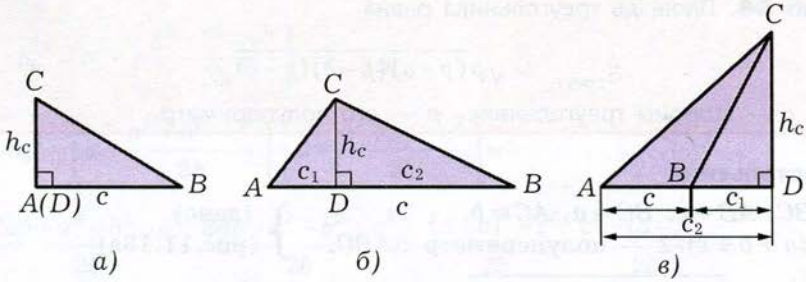


Рис. 11.12

1. Высота h_c совпадает со стороной CA.

2. Треугольник ABC прямоугольный, его катеты − отрезки $CA = h_c$ и $BA = c$.

3. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\, c \cdot h_c$ (1, 2, Т.51).

Случай 2. Точка D лежит на основании c (рис. 11.12б).

1. Высота CD разбивает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника ACD и BCD с катетами c_1 и c_2 и общим катетом h_c (1, определение прямоугольного треугольника).

2. Площади этих треугольников вычисляются по формулам:

$S_{ACD} = \dfrac{1}{2}\, c_1 \cdot h_c$; $\quad S_{BCD} = \dfrac{1}{2}\, c_2 \cdot h_c$ (1, Т.51).

3. $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$ (2, свойство площадей).

4. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\,(c_1 + c_2) \cdot h_c = \dfrac{1}{2}\, c \cdot h_c$ (2, 3).

Случай 3. Точка D лежит вне основания c (рис. 11.12в).

1. Прямоугольный треугольник ACD разбивается отрезком CB на треугольник ACB и прямоугольный треугольник BDC (1, определение прямоугольного треугольника).

2. $S_{ACD} = S_{ACB} + S_{BDC}$ (1, свойство площадей).

3. $S_{ACB} = S_{ACD} - S_{BDC}$ (2).

4. $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}\, c_1 \cdot h_c$; $\; S_{BDC} = \dfrac{1}{2}\, c_2 \cdot h_c$ и $c = c_2 - c_1$ (3, Т.51).

5. $S_{ACB} = \dfrac{1}{2}\, c \cdot h_c$ (4).

Теорема 53 доказана для всех трёх случаев. ■

Выведем формулу для вычисления площади треугольника через его стороны. Эта формула носит имя древнегреческого математика Герона Александрийского (около I в. н.э.).

Теорема 54. Площадь треугольника равна

$$S_{\text{треуг.}} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \triangle ABC,\ AB = c,\ BC = a,\ AC = b. \\ 2.\ p = (a+b+c)/2 \text{ — полупериметр } \triangle ABC. \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(дано)}\\ \text{(рис.11.13а)}\end{array}$$

3. $S_{\text{треуг.}} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ (требуется доказать).

Рассмотрим доказательство для остроугольного треугольника. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Для получения формулы Герона воспользуемся Т.51, а для этого сначала найдём высоту $\triangle ABC$.

4. Проведём $BD \perp AC$, $BD = h_b$ (построение) (рис. 11.13б).

5. $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$ — прямоугольные (4).

Нам нужно найти высоту h_b. Обратим внимание на то, что BD — общий катет двух прямоугольных треугольников: $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$. Значит, можно дважды применить теорему Пифагора для того, чтобы найти два других катета этих прямоугольных треугольников.

6. $CD = x$ (обозначение).

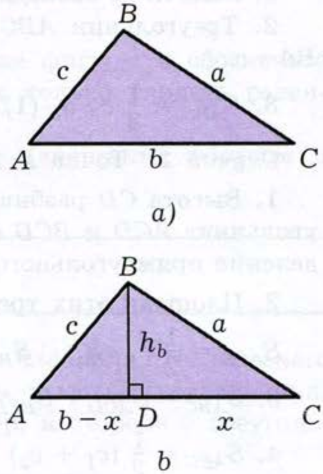
7. $DA = b - x$ (1, 6).

8. Из $\triangle ABD$ имеем: ${h_b}^2 = c^2 - (b - x)^2$ (1, 4, 7, теорема Пифагора).

9. Из $\triangle BDC$ имеем: ${h_b}^2 = a^2 - x^2$ (1, 4, 5, теорема Пифагора).

10. $a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$ (8, 9).

11. $x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$ (9).



а) б)

Рис. 11.13

12. $h_b{}^2 = a^2 - \left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)$ (8, 10).

13. $h_b{}^2 = \left(a + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)\left(a - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right) =$

$$= \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2b}\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2b} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2b}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2b} =$$

$$= \frac{1}{4b^2}\cdot(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b) \quad (11).$$

Заметим, что $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $c + a - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, и получим:

14. $h_b{}^2 = \dfrac{1}{4b^2}\cdot 2p\cdot(2p-2c)\cdot(2p-2b)\cdot(2p-2a) = 4\dfrac{p}{b^2}\cdot(p-c)\cdot(p-b)\cdot(p-a)$ (2, 12).

15. $h_b = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (13).

16(3). $S_{\text{треуг.}} = \dfrac{1}{2}\cdot bh_b = \dfrac{1}{2}\cdot b\cdot\dfrac{2}{b}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (15, формула площади треугольника). ■

§ 11.5 ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Выведем *формулу площади параллелограмма*. Для этого сначала определим *высоту параллелограмма*.

Определение 55. Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на прямую, содержащую противоположную сторону.

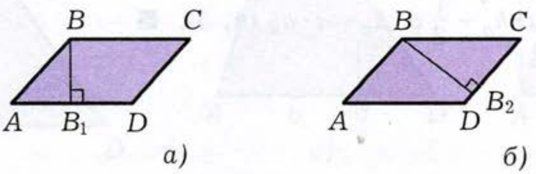


Рис. 11.14

Высотой параллелограмма называется также и длина этого перпендикуляра. На рис. 11.14 изображены высоты параллелограмма $ABCD$ — BB_1 (рис. 11.14а) и BB_2 (рис. 11.14б).

Часто для краткости говорят, что высота параллелограмма проведена к его стороне, а не к прямой, содержащей эту сторону.

Высоту параллелограмма, проведённую к стороне a, обозначают h_a.

Теорема 55. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и проведённой к ней высоты:

$$S_{\text{парал.}} = a \cdot h_a,$$

где a — сторона параллелограмма, h_a — высота параллелограмма, проведённая к стороне a.

Доказательство

1. $ABCD$ — параллелограмм, $AD = BC = a$, $BK = h_a$ — высота параллелограмма $ABCD$. } (дано) (рис. 11.15а)

2. $S_{ABCD} = a \cdot h_a$ (требуется доказать).

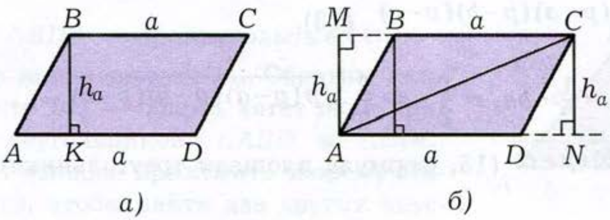


Рис. 11.15

Найти площадь параллелограмма $ABCD$ можно, воспользовавшись формулой площади треугольника. Чтобы получить треугольники, можно провести одну из диагоналей параллелограмма $ABCD$.

3. Проведём диагональ AC параллелограмма $ABCD$ и высоты AM и CN (построение) (рис. 11.15б).

4. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ (4, свойство площадей).

5. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a$ (4, Т.51).

6(2). $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a + \frac{1}{2}\, a \cdot h_a = a \cdot h_a$ (4, 5). ■

§ 11.6 ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ И ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Выведем *формулу для нахождения площади* ещё одного четырёхугольника — *трапеции*. Для этого нам понадобится понятие *высоты трапеции*.

Сначала заметим, что если один конец отрезка лежит на одной из двух параллельных прямых, а другой конец — на другой прямой, причём отрезок перпендикулярен одной из прямых, то он перпендикулярен и другой прямой.

Такой отрезок называется общим перпендикуляром параллельных прямых.

Определение 56. Высотой трапеции называется общий перпендикуляр к её основаниям (или прямым, содержащим её основания).

Высотой называется также длина этого перпендикуляра. На рис. 11.16 изображена трапеция $ABCD$. BE — высота трапеции $ABCD$.

Теорема 56. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований и высоты:

$$S_{\text{трап.}} = \frac{a+b}{2}\cdot h,$$

где a и b — основания трапеции, h — высота.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ ABCD \text{ — трапеция, } BC = a,\ AD = b, \\ \quad CM = h \text{ — высота трапеции.} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(дано)} \\ \text{(рис. 11.17а)}\end{array}$$

2. $S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2}\cdot h$ (требуется доказать).

Мы можем воспользоваться формулой площади треугольника. Для этого целесообразно провести одну из диагоналей трапеции.

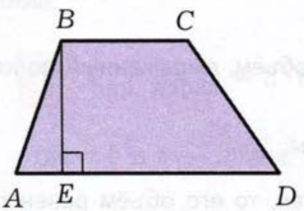
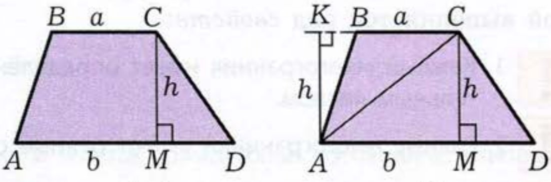


Рис. 11.16



а) б)

Рис. 11.17

3. Проведём диагональ трапеции AC и высоту AK (построение) (рис. 11.17б).

4. Мы получили два треугольника ABC и ACD с основаниями a и b и высотой h (1, 3).

5. $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$, $S_{ACD} = \frac{1}{2} b \cdot h$ (4, Т.51).

6(2). $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$ (5, свойство площадей). ■

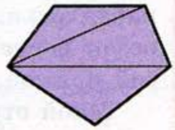


Рис. 11.18

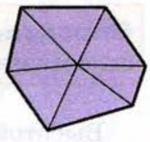


Рис. 11.19

В заключение рассмотрим вопрос о *возможности вычисления площади произвольного многоугольника*.

Чтобы вычислить площадь произвольного многоугольника, можно разбить его на треугольники, не имеющие общих внутренних точек, и найти сумму их площадей.

Такое разбиение многоугольника можно осуществить, проведя, например, диагонали из одной его вершины (рис. 11.18). В некоторых случаях удобно пользоваться другим разбиением (рис. 11.19).

§ 11.7 ЗНАКОМСТВО С ОБЪЁМАМИ ФИГУР

Одной из самых распространённых величин, характеризующих фигуру (геометрическое тело) в пространстве, является *объём*.

Для измерения объёмов существуют свои приёмы. Например, объём небольшой детали можно измерить с помощью мензурки с делениями, а объём ведра легко определить, наливая в него воду кружкой известного объёма. Но объём комнаты или доменной печи подобным образом измерить невозможно. Их вычисляют, используя определённые приёмы.

Сначала, так же, как и при вычислении площадей, мы должны понять, для каких фигур мы будем вычислять объёмы. Для начала научимся находить объёмы многогранников.

Сформулируем некоторые общие свойства объёмов.

Как и площадь плоских фигур, *объём является величиной*, для которой выполняется ряд *свойств*:

1. Каждый многогранник имеет определённый объём, выраженный положительным числом.

2. Равные многогранники имеют равные объёмы.

3. Если многогранник разбит на несколько частей, то его объём равен сумме объёмов всех этих частей.

4. Единицей измерения объёма будем считать объём куба с длиной ребра *e*, где *e* — единица измерения длины.

Если за единицу длины принимается 1 мм, то единицей объёма является 1 мм^3 (кубический миллиметр); при единице длины 1 см единицей объёма является 1 см^3 (кубический сантиметр). Если единицей измерения длины является 1 м, ему соответствует единица объёма 1 м^3 (кубический метр).

5. Объём куба со стороной *a* равен a^3.

$$V_{\text{куба}} = a^3, \text{ где } a \text{ — ребро куба.}$$

Выведем *формулу для вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда*.

Пусть нам дан прямоугольный параллелепипед с измерениями: длина — a (см), ширина — b (см), высота — c (см). Рассмотрим сначала случай, когда a, b и c — целые числа. Тогда площадь основания будет равна $a \cdot b$ (см^2). Значит, на основании прямоугольного параллелепипеда уложатся в один слой $a \cdot b$ кубов с ребром 1 см (рис. 11.20). Всего таких слоёв в параллелепипеде будет c, поэтому его объём будет равен $a \cdot b \cdot c$ (см^3). Обозначив площадь основания через S, получим ещё одну формулу для вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда: $V = S \cdot c$.

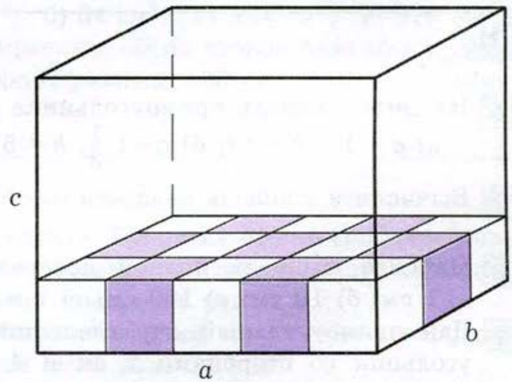


Рис. 11.20

Можно доказать, что полученные формулы справедливы, когда a, b, c — произвольные положительные действительные числа.

Итак:

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений:

$$V_{\text{пр. парал.}} = a \cdot b \cdot c,$$

где *a*, *b* и *c* — длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда.

Развиваем умения

К § 11.1–11.3

Н ⇑

1 Как изменится площадь квадрата, если его сторона: а) удвоится; б) утроится; в) станет вдвое меньше?

2 Как изменится площадь прямоугольника, если: а) обе его стороны удвоятся; б) обе стороны уменьшатся в 3 раза; в) одна сторона увеличится в 4 раза, а другая уменьшится в 4 раза; г) одна сторона увеличится в 6 раз, а другая уменьшится в 3 раза?

3 Во сколько раз площадь полной поверхности куба больше площади его грани?

4 Как изменится площадь полной поверхности куба, если все рёбра куба увеличить в одно и то же число раз?

5 Если разрезать куб на два равных прямоугольных параллелепипеда, будут ли равны площади поверхностей этих параллелепипедов?

Н

6 Найдите площадь прямоугольника со сторонами a и h, если:
а) $a = 17$, $h = 12$; б) $a = 1\frac{1}{3}$, $h = 5\frac{3}{4}$; в) $a = 3$, $h = 5$; г) $a = 10$, $h = 15$.

7 Вычислите площадь квадрата со стороной a, если: а) $a = 24$; б) $a = 3\frac{3}{5}$; в) $a = 7$; г) $a = 46$.

8 Найдите площадь полной поверхности куба, если его ребро равно: а) 1 см; б) 10 см; в) 100 см; г) 1 м.

9 Дан прямоугольный параллелепипед, в его основании лежит прямоугольник со сторонами 2 см и 4 см, высота параллелепипеда равна 2 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей этого параллелепипеда.

10 Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 9 м и 12 м; б) 12 см и 16 см; в) $3a$ и $4a$.

11 Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а один из катетов — 12 см. Найдите другой катет.

12 Вычислите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 144 см^2; б) 169 м^2; в) 400 мм^2.

13 Вычислите периметр квадрата, площадь которого равна 25 м^2.

14 Квадрат и прямоугольник имеют равные площади. Чему равна сторона квадрата, если прямоугольник имеет размеры 25 см × 16 см?

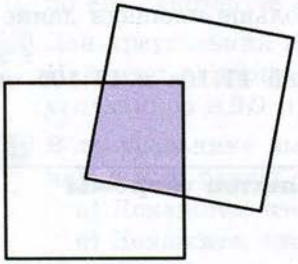


Рис. 11.21

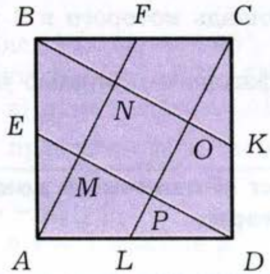


Рис. 11.22

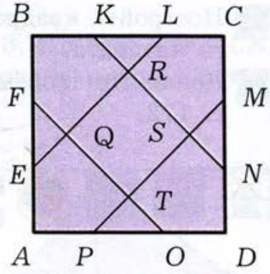


Рис. 11.23

15 Сколько рулонов обоев потребуется для оклейки комнаты 6 м × 5 м × 3 м, если длина рулона 7 м, ширина — 0,5 м? Считаем, что на обрезки уйдёт запас обоев, равный площади окон и двери.

16 Докажите, что если два прямоугольника имеют по равной стороне, то их площади относятся как их другие стороны.

17 Вычислите длину ребра куба, если его полная поверхность равна: а) 150 см^2; б) 600 см^2; в) 216 см^2; г) 864 см^2.

18 Вычислите площадь полной поверхности куба, если площадь его боковой поверхности равна: а) 100 см^2; б) 64 см^2; в) 324 см^2; г) 576 см^2.

19 Сколько потребуется белил для окраски с обеих сторон бака (без крышки), имеющего форму куба с ребром, равным 100 см, если на окраску 1 м^2 требуется 0,25 кг белил?

П

20 На рис. 11.21 изображены два квадрата. Вершина одного квадрата совпадает с центром другого. Найдите площадь заштрихованного четырёхугольника, если длины сторон обоих квадратов равны a.

21 Можно ли куб с ребром 1 см разбить на кубики так, чтобы суммарная площадь поверхности этих кубиков была больше 1 м^2?

22 Докажите, что из всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

23 Докажите, что из всех равновеликих прямоугольников наименьший периметр имеет квадрат.

М

24 а) E, F, K и L — середины сторон квадрата $ABCD$ (рис. 11.22). Сравните площадь четырёхугольника $MNOP$ с площадью квадрата $ABCD$.
б) $ABCD$ — квадрат (рис. 11.23). E, F, K, L, M, N, O, P — точки, делящие каждую сторону квадрата на три равные части. Сравните площадь четырёхугольника $QRST$ с площадью квадрата $ABCD$.

25 Постройте квадрат, площадь которого в 2 раза больше площади данного квадрата.

26 Докажите теорему Пифагора с помощью чертежей 11.10а и 11.10б на с. 172.

Проект «Различные доказательства теоремы Пифагора»

Найдите в любых доступных вам источниках или придумайте сами как можно больше различных доказательств теоремы Пифагора (известно, что их имеется больше сотни). Единственное требование: эти доказательства должны быть вам понятны, и вы должны суметь их выполнить самостоятельно. Проведите математический праздник «Теорема Пифагора».

К § 11.4

Н ⇑

27 Сколько равных высот имеет: а) произвольный треугольник, не являющийся равнобедренным; б) равнобедренный треугольник, не являющийся равносторонним; в) равносторонний треугольник?

28 Можно ли площадь прямоугольного треугольника вычислить по формуле площади произвольного треугольника?

29 Укажите равновеликие треугольники на рис. 11.24.

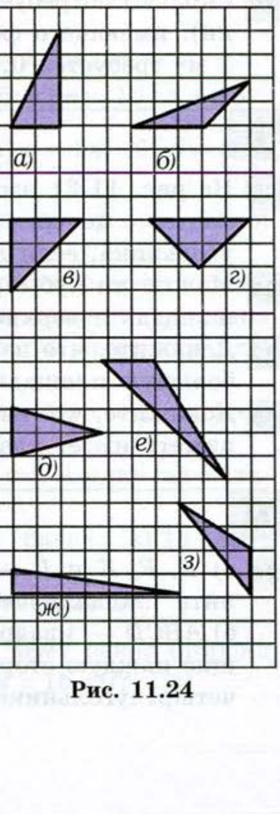


Рис. 11.24

Н

30 Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 7 см; б) 1,2 дм и 35 дм.

31 Площадь треугольника 48 см^2. Вычислите высоту треугольника, проведённую к стороне, равной 32 см.

32 Постройте три разных треугольника, имеющих одинаковую площадь. Обоснуйте ваш вывод.

33 Выведите формулу для вычисления площади равнобедренного прямоугольного треугольника по его гипотенузе c.

34 Дан треугольник ABC (рис. 11.25); $A = 90°$, $CA = 3$, $AB = 4$, $AD \perp CB$. Найдите: а) площадь треугольника ABC; б) отношение площадей треугольников ABD и ACD; в) длину отрезка AD.

35 В треугольнике высоты, проведённые к сторонам a и b, равны h_a и h_b.

а) Докажите, что $a : b = h_b : h_a$.

б) Докажите, что если в треугольнике $a < b$, то $h_b < h_a$.

36 Найдите зависимость между площадью S данного треугольника и площадью S_1 треугольника, отсечённого от него любой из средних линий.

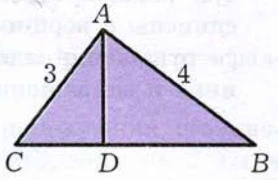


Рис. 11.25

П

37 Вычислите площади фигур, изображённых на рис. 11.26.

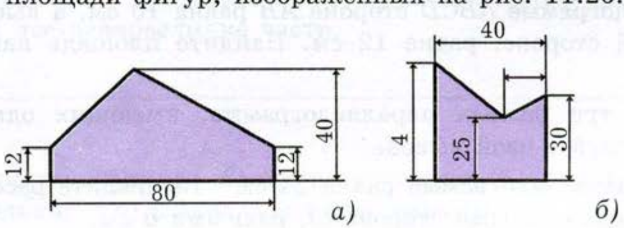


Рис. 11.26

38 Существует ли треугольник, высоты которого равны: а) 5 см, 4 см, 3 см; б) 1 см, 1 см, 3 см; в) 5 см, 10 см, 12 см?

39 Через вершину треугольника проведите прямую, разбивающую его: а) на два равновеликих треугольника; б) на два треугольника, площади которых относятся как 2 : 3.

40 Через вершину треугольника проведите две прямые, разбивающие его на три равновеликих треугольника.

М

41 Постройте равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание построенного треугольника было равно одной из сторон данного треугольника.

42 Через точку E, расположенную внутри угла BAC, проведите прямую так, чтобы она отсекала от угла BAC треугольник наименьшей площади.

43 Каждая сторона треугольника разделена на три равных отрезка, и точки деления соединены с вершинами (рис. 11.27). Найдите отношение площадей данного треугольника и закрашенного.

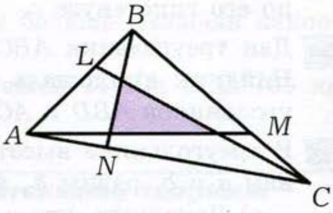


Рис. 11.27

К § 11.5

Н ⇑

44 • Укажите равновеликие параллелограммы на рис. 11.28.

Н

45 В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 10 см, а высота, проведённая к этой стороне, равна 12 см. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

46 Постройте три разных параллелограмма, имеющих одинаковую площадь. Обоснуйте свой вывод.

47 Площадь параллелограмма равна 24 см^2. Вычислите расстояние между его противоположными сторонами, равными 6 см.

48 В параллелограмме, площадь которого равна 41 см^2, стороны равны 5 см и 10 см. Вычислите высоты параллелограмма.

49 Стороны параллелограмма равны 6 см и 4 см. Одна из высот равна 5 см. Найдите другую высоту. Сколько решений имеет задача?

50 Постройте параллелограмм, площадь которого 10 см^2, а стороны равны 5 см и 3 см.

51 Дан параллелограмм $ABCD$; AB = 12 см, AC = 16 см. Вершина D уда-

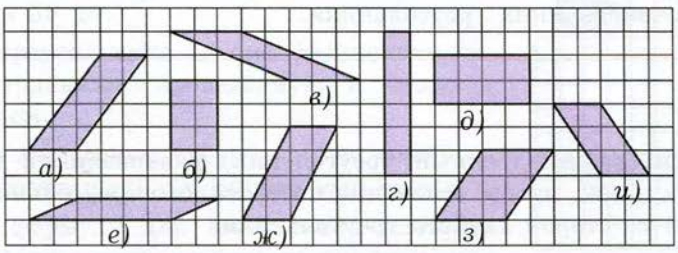


Рис. 11.28

лена от диагонали AC на 4 см. Вычислите расстояние от точки D до прямой AB.

52 Диагонали ромба равны 8 см и 14 см. Найдите площадь ромба.

П

53 Через вершину ромба проведите две прямые, делящие ромб на три равновеликие части.

54 Площадь параллелограмма равна 24 см^2. Точка пересечения его диагоналей удалена от прямых, на которых лежат стороны, на 2 см и 3 см. Вычислите периметр этого параллелограмма.

М

55 Докажите, что четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждая из его диагоналей делит его площадь пополам.

56 Через данную точку проведите прямую, рассекающую данный параллелограмм на две равновеликие части.

К § 11.6

Н ⇑

57 • Можно ли по формуле площади трапеции вычислить: а) площадь прямоугольника; б) площадь параллелограмма?

58 • Можно ли площади треугольника и трапеции вычислить по формуле $S = ch$, где c — средняя линия, а h — высота треугольника или трапеции соответственно?

Н

59 Вычислите площадь трапеции, основания которой 12 см и 16 см, а высота 15 см.

60 Вычислите площадь трапеции, большее основание которой 38 см, высота 14 см, а проекции боковых сторон на основание равны высоте трапеции.

61 Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 3,6 дм и 6 дм. Вычислите площадь этой трапеции.

62 По данным на рис. 11.29 размерам (в миллиметрах) постройте трапеции и найдите их площади, проведя необходимые измерения.

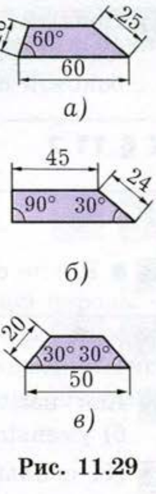
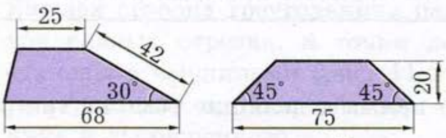
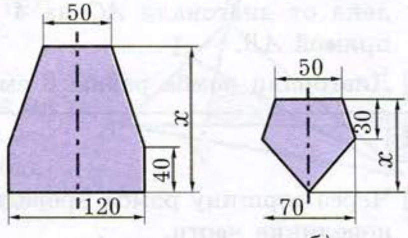


Рис. 11.29



а) б)

Рис. 11.30



а) б)

Рис. 11.31

П

63 По размерам, проставленным на рис. 11.30, вычислите площади трапеций.

64 Площади многоугольников, изображённых на рис. 11.31, равны соответственно: а) 12 110 мм^2; б) 3 375 мм^2. Вычислите размер x в обоих случаях.

М

65 У равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, а высота равна h. Найдите площадь трапеции.

66 Дана трапеция $ABCD$; $AB \parallel CD$, M принадлежит отрезку AB, $AM = MB$, P принадлежит отрезку MD, $DP = PM$, Q принадлежит отрезку MC, $CQ = MQ$. Докажите, что треугольники APD и BQC равновелики.

67 Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, опущенный на неё из середины другой боковой стороны.

К § 11.7

Н ⇓

68 ● Какие единицы объёма вы знаете?

Н ⇑

69 Как изменится объём куба, если его ребро: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 3 раза; в) уменьшить на 50%?

70 На сколько кубических сантиметров увеличится объём куба, если его ребро, равное 1 м, увеличить на 1 см?

Н

71 Высота прямоугольного параллелепипеда равна 7, а его основание имеет стороны 4 и 5. Найдите его объём.

72 Прямоугольный металлический бак размером 30 см $\times$ 30 см $\times$ 30 см наполнен водой. Сколько литров воды он содержит?

73 Объём куба равен 27 см^3. Чему равно ребро куба?

74 Объём прямоугольного параллелепипеда 270 дм^3. У параллелепипеда есть три измерения: a, b и c; $a = 5$ дм, $b : c = 2 : 3$. Найдите эти измерения.

75 Сколько стальных болванок размерами 420 мм $\times$ 240 мм $\times$ 90 мм можно перевезти в кузове автомашины грузоподъёмностью 3 т (удельный вес стали — 7,8 г/см^3)?

76 Кирпич имеет размеры 250 мм $\times$ 120 мм $\times$ 65 мм. Сколько штук кирпича можно погрузить на трёхтонную автомашину (удельный вес кирпича — 1,6 г/см^3)?

77 Цех для поднятия и перенесения тяжестей имеет тали (систему блоков) грузоподъёмностью 2 т. Можно ли этими талями поднять чугунную болванку в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющую размеры 820 мм $\times$ 210 мм $\times$ 120 мм (удельный вес чугуна — 7,3 г/см^3)?

П

78 У двух прямоугольных параллелепипедов равновелики основания и равновелики сечения, проведённые через диагонали оснований и боковые рёбра. Обязательно ли равны объёмы этих параллелепипедов?

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Определение объёма камня неправильной формы.

ВАША РОЛЬ. Геолог.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Группа геологов нашла образец ценной породы – камень неправильной формы. Геологи находятся на берегу озера, и в их распоряжении имеется большая железная бочка (в которую камень помещается целиком), несколько вёдер неизвестного объёма, а также бутылка объёмом 1 л.

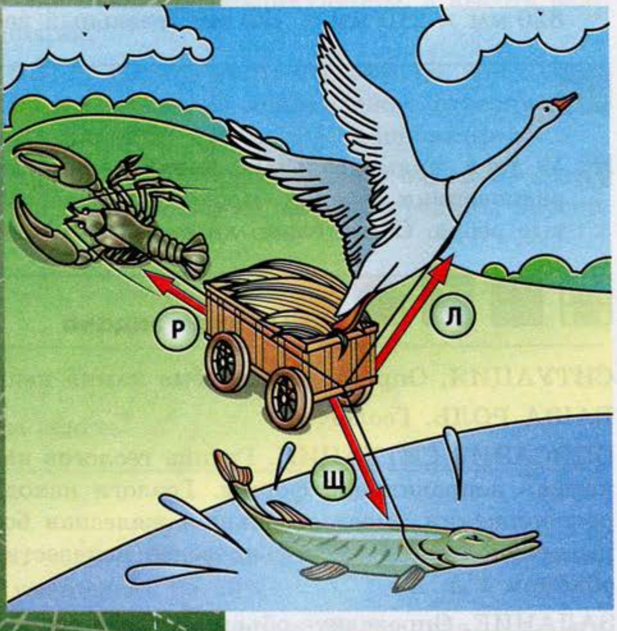
ЗАДАНИЕ. Определите объём камня с точностью до 1 л.

РАЗДЕЛ 4

ВЕКТОРЫ

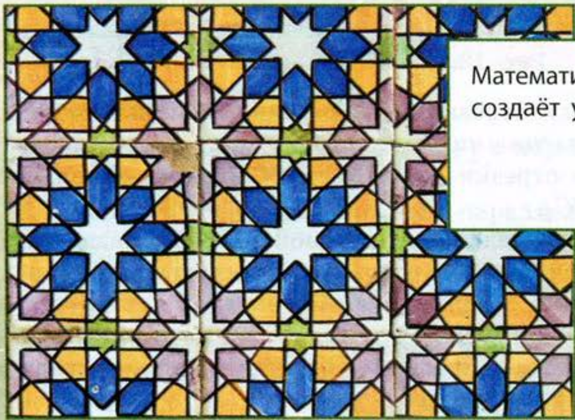
...Да Лебедь тянет в облака,
Рак пятится назад,
а Щука тянет в воду.

Иван Андреевич Крылов
(русский писатель, баснописец, 1769–1844)



Глава 12

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС



Математик, так же как художник или поэт, создаёт узоры.

Годфри Харолд Харди
(английский математик, 1877–1947)

Открываем новые знания

§ 12.1 ЧТО ТАКОЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

В 7-м классе мы изучали различные виды изометрий: поворот фигуры вокруг точки на некоторый угол, центральную и осевую симметрии. В этой главе мы познакомимся с ещё одним видом изометрии — *параллельным переносом*.

Что же такое параллельный перенос?

В русском языке есть синоним этого термина — *сдвиг*. Лежащее на столе яблоко передвинули по некоторой прямой, не изменяя его формы и размеров и не вращая его, — это и есть сдвиг. Примером сдвига может служить, например, движение автомобиля или поезда по прямолинейному участку дороги.

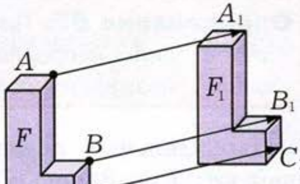


Рис. 12.1

На рис. 12.1 изображён сдвиг некоторой фигуры F. При этом сдвиге она перешла в фигуру F_1. Точка A фигуры F перешла в точку A_1 фигуры F_1, точка B перешла в точку B_1, точка C — в точку C_1. Для удобства

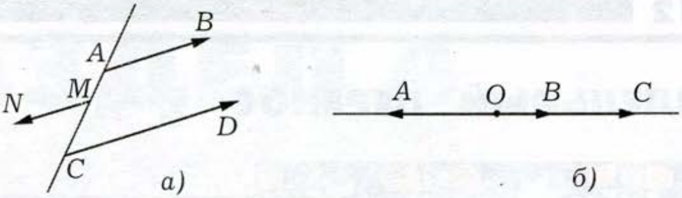


Рис. 12.2

процесс перехода точек показан отрезками со стрелками. В дальнейшем мы будем называть их *направленными отрезками*.

На рис. 12.1 направленные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 имеют одинаковое направление и $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Два направленных отрезка, не лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если они принадлежат двум параллельным прямым и лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала.

Два направленных отрезка называются *противоположно направленными*, если они принадлежат двум параллельным прямым и лежат по разные стороны от прямой, соединяющей их начала.

На рис. 12.2а направленные отрезки AB и CD одинаково направлены, направленные отрезки AB и MN, CD и MN противоположно направлены.

Два направленных отрезка, лежащие на одной прямой, являются сонаправленными, если существует направленный отрезок, сонаправленный каждому из них, и противоположно направленными, если такого отрезка не существует. На рис. 12.2б направленные отрезки OB и OC одинаково направлены, направленные отрезки OA и OB, OA и OC противоположно направлены.

Так как направленный отрезок является частью луча с тем же началом, можно говорить о сонаправленных и противоположно направленных лучах.

Можно дать такое определение параллельного переноса.

Определение 57. Преобразование, при котором каждая точка фигуры переходит в одном направлении (по сонаправленным лучам) на одно и то же расстояние, называется параллельным переносом.

Параллельный перенос в направлении луча AC на расстояние AC обозначают: T_{AC}. Запись $T_{AC}(X) = X_1$ читается так: «параллельный перенос T переводит точку X в точку X_1».

Если при параллельном переносе точка A перешла в точку B, то можно сказать, что этот параллельный перенос задан направленным отрезком AB. Имея направленный отрезок AB, мы можем построить образ любой точки при этом параллельном переносе.

§ 12.2 СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

Докажем важное свойство параллельного переноса.

Теорема 57. Параллельный перенос является изометрией.

Доказательство

1. Дан параллельный перенос T_{XX_1}, переводящий точки X и Y в точки X_1 и Y_1 (рис. 12.3а).

2. Требуется доказать, что этот параллельный перенос является изометрией.

3. Для доказательства п. 2 нужно доказать, что $XY = X_1Y_1$ (требуется доказать).

Сначала рассмотрим случай, когда точки X, Y и X_1, Y_1 не лежат на одной прямой. Из п. 1 по определению параллельного переноса имеем:

4. Лучи XX_1 и YY_1 сонаправлены, $XX_1 \parallel YY_1$ и $XX_1 = YY_1$ (1, определение параллельного переноса).

Отметим, что на рис. 12.3а не проведены отрезки XY и X_1Y_1.

Если мы их проведём, то получим четырёхугольник XYY_1X_1. Мы получим требуемое, если докажем, что XYY_1X_1 — параллелограмм.

5. Соединим точки X и Y, X_1 и Y_1 (построение) (рис. 12.3б).

6. Получим четырёхугольник XYY_1X_1 (5).

7. XYY_1X_1 — параллелограмм (4, 6, признак параллелограмма — Т.43).

8. $XY = X_1Y_1$ (7, свойство параллелограмма).

9(2). Параллельный перенос является изометрией. ■

Рассмотрите самостоятельно случай, когда точки X, Y и X_1, Y_1 лежат на одной прямой. Из данной теоремы следует:

! При параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей прямую.

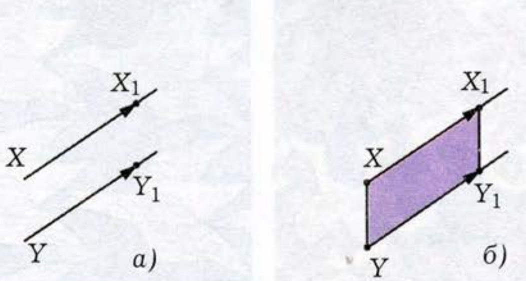


Рис. 12.3

При параллельном переносе сохраняются расстояния между соответствующими точками.

Параллельный перенос переводит фигуры в равные им фигуры.

§ 12.3* ОРНАМЕНТЫ, БОРДЮРЫ, ПАРКЕТЫ

На рис. 12.4 изображена картина, которая при параллельном переносе переходит в себя (укажите самостоятельно направление этого переноса и расстояние, на которое он осуществляется).

Рис. 12.4

В том случае, когда равные фигуры заполняют всю плоскость, говорят, что на плоскости задан *орнамент*. Орнаментами покрывали стены и в древности (например, на рисунке к главе на с. 189 изображён древнеегипетский орнамент), и в наше время — оклеивая, например, стены обоями.

Оригинальные орнаменты созданы известным голландским художником Морисом Эшером (рис. 12.5 и 12.6).

Рис. 12.5

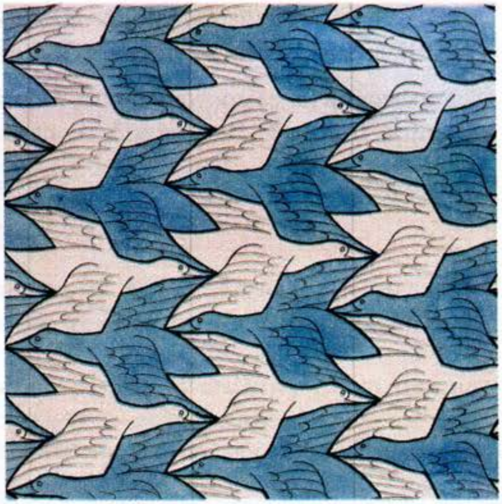


Рис. 12.6

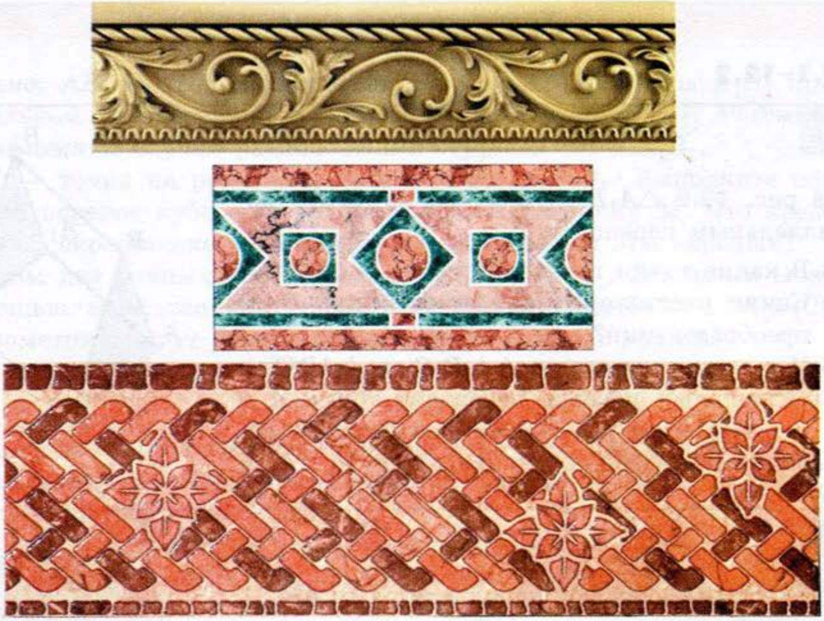
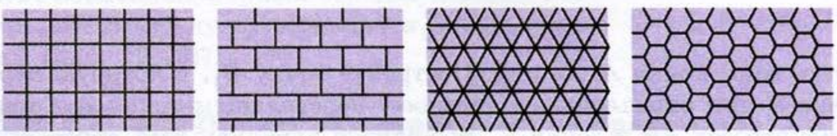


Рис. 12.7

Если равные фигуры заполняют полосу между параллельными прямыми, заполненная ими полоса называется *бордюром*. Простейший пример бордюра дают обои (точнее, кусок обоев, который мыслится как бесконечно продолженный в обе стороны). Решётки оград парков и набережных, узоры карнизов и тканей также являются примерами бордюров (рис. 12.7). Ранее мы познакомились с *паркетами*, т.е. покрытиями плоскости правильными многоугольниками.

На рис. 12.8 приведены примеры паркетов. Видно, что при некоторых параллельных переносах они переходят в себя.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 12.8

Развиваем умения

К § 12.1–12.2

Н ⇓

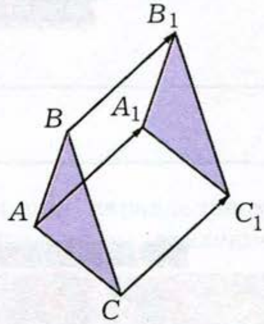


Рис. 12.9

1 На рис. 12.9 $\triangle A_1B_1C_1$ получен из $\triangle ABC$ параллельным переносом T_{AA_1}.

а) В какие точки переходят точки A, B, C?

б) Какие расстояния сохраняются при этом преобразовании?

в) Что можно сказать о $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$?

2 Параллельный перенос переводит точки A и B в точки A_1 и B_1. Какими свойствами обладают: а) отрезки AA_1 и BB_1; б) лучи AA_1 и BB_1?

Н ⇑

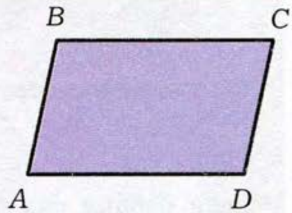


Рис. 12.10

3 На рис. 12.10 изображён параллелограмм $ABCD$. Существует ли параллельный перенос, переводящий: а) отрезок AB в отрезок DC; б) отрезок AD в отрезок BC?

4 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Существует ли параллельный перенос, переводящий: а) основание $ABCD$ в основание $A_1B_1C_1D_1$; б) ребро AA_1 в другие рёбра; в) боковые грани в другие боковые грани?

5 Объясните, могут ли два куба, изображённые на рис. 12.11, быть получены друг из друга с помощью параллельного переноса.

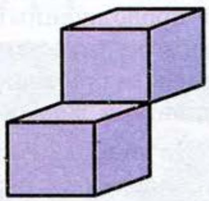


Рис. 12.11

Н

6 Пусть даны точки A, A_1 и B. Постройте точку B_1, в которую переходит точка B при параллельном переносе, переводящем точку A в точку A_1.

7 Даны отрезок AB и точка K. Выполните параллельный перенос отрезка AB так, чтобы его середина переместилась в точку K.

8 Постройте фигуру, в которую переходит данный треугольник ABC при параллельном переносе, переводящем точку A в точку C.

9 Постройте фигуру, в которую переходит данный параллелограмм $ABCD$ при параллельном переносе, переводящем точку A в точку C.

П

10 Дано: $AB = A_1B_1$. Перейдёт ли отрезок AB в отрезок A_1B_1 при параллельном переносе, переводящем точку A в точку A_1? Рассмотрите все возможные случаи расположения отрезков AB и A_1B_1.

11 M — точка на ребре AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выполните параллельный перенос куба, переводящий точку A в точку M. Что представляет собой пересечение куба и фигуры, полученной при переносе?

12 Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Всегда ли можно с помощью параллельного переноса перевести $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$? Какие изометрии могут перевести один треугольник в другой?

М

13 Даны две пересекающиеся прямые a и b (рис. 12.12). Постройте отрезок с концами на этих прямых, равный и параллельный AB.

14 Даны угол и прямая l. Постройте отрезок AB данной длины a так, чтобы он был параллелен прямой l и чтобы его концы принадлежали сторонам угла.

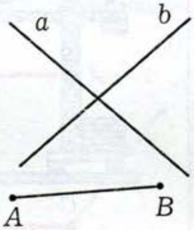


Рис. 12.12

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Нахождение кратчайшего маршрута.

ВАША РОЛЬ. Проектировщик.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Населённые пункты A и B находятся на противоположных берегах канала с прямолинейными параллельными берегами.

ЗАДАНИЕ. В каком месте следует строить мост KP, перпендикулярный берегам канала, чтобы путь $AKPB$ между пунктами A и B был кратчайшим (рис. 12.13)?

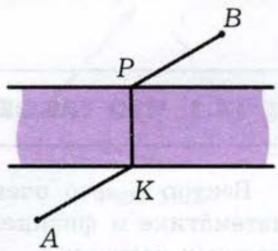


Рис. 12.13

Проект «Конструирование орнаментов и бордюров»

Разработайте свой оригинальный орнамент или бордюр. Проведите конкурсы на лучший орнамент и лучший бордюр.

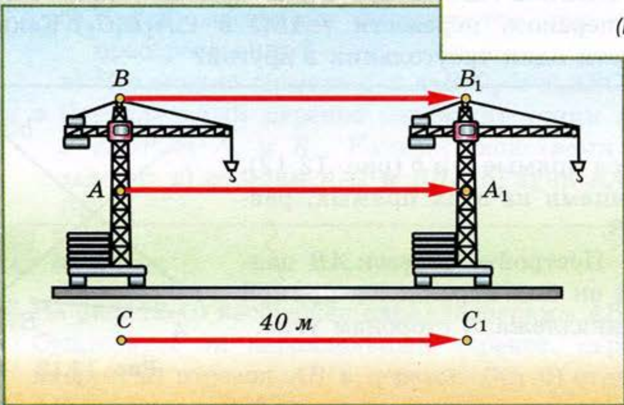
Глава 13

ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

На самом деле векторы и переносы – это одно и то же, хотя их и называют по-разному...

Герман Вейль

(немецкий математик, 1885–1955)



Открываем новые знания

§ 13.1 ЧТО ТАКОЕ ВЕКТОР

Вектор — это очень важное понятие, которое широко используется в математике и физике. Понятие вектора тесно связано с *изучением всевозможных величин*.

Некоторые величины в математике и физике, например такие, как расстояние, площадь, объём, температура, работа, масса и др., характеризуются в процессе их измерения только соответствующим числом. Такие величины в математике называют *скалярными*. Значения скалярных величин могут быть однозначно отмечены на координатной прямой или *шкале*.

Кроме указанных величин, есть и другие, например перемещение, скорость, ускорение, сила и др., для характеристики которых необходимо знать не только числовое значение величины, но и направление. Такие величины относятся к *векторным величинам*, которые характеризуются как численным значением, так и направлением.

На рисунке к главе изображён подъёмный кран, движущийся по рельсам. Кран переместился из одного положения в другое. Это параллельный перенос крана. В физике этот процесс называется *поступательным движением тела*. Подъёмный кран Ф за некоторый промежуток времени сместился вправо на расстояние 40 м. Это означает, что все его точки сместились вправо на 40 м. На рисунке это показано направленными отрезками.

Используя язык геометрии, пример с поступательным движением крана можно записать так: фигура Ф при параллельном переносе в направлении луча AA_1 на расстояние AA_1 перешла в фигуру $Ф_1$ (второе положение крана), при этом точка A перешла в точку A_1, точка B перешла в точку B_1 и т.д.

В математике и физике направленные отрезки, изображаемые на рассматриваемом рисунке, называют *векторами*. С помощью направленных отрезков удобно изображать различные векторные величины: силу, скорость, ускорение и т.д.

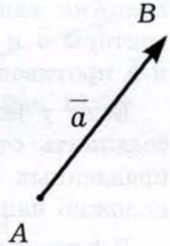


Рис. 13.1

Итак,

! Направленный отрезок называется вектором.

На чертеже направление вектора отмечается стрелкой (рис. 13.1). Первый по этому направлению конец отрезка называется *началом вектора* (или точкой приложения), второй — *концом вектора*.

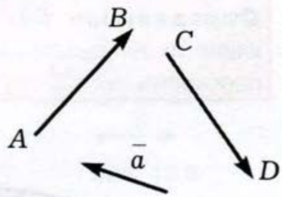


Рис. 13.2

Вектор записывается обозначениями его начала и конца слева направо, а сверху ставится чёрточка: $\overline{AB}$.

Иногда векторы обозначают просто малыми буквами и над буквами тоже ставят черту: $\bar{a}$.

На рис. 13.2 изображены три вектора: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\bar{a}$.

§ 13.2 КОЛЛИНЕАРНЫЕ И КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

О направленных отрезках мы будем говорить так же, как об обычных отрезках. Направленные отрезки могут лежать на одной прямой, не лежать на одной прямой, лежать в одной плоскости, не лежать в одной плоскости и т.д. Направленные отрезки могут быть взаимно перпендикулярны или параллельны.

Определение 58. Два вектора называют коллинеарными, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.

На рис. 13.3 векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — коллинеарны, а векторы $\overline{a}$ и $\overline{d}$ — не коллинеарны.

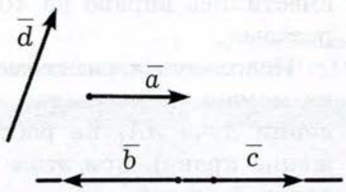


Рис. 13.3

Два коллинеарных вектора могут быть *одинаково направленными* (для краткости говорят также *сонаправленными*) или *противоположно направленными*. Так, на рис. 13.3 векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ сонаправленные, а векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направленные.

Если у коллинеарных векторов, лежащих на параллельных прямых, соединить отрезком начала и соединить отрезком концы, то для сонаправленных векторов эти отрезки не будут пересекаться, а для противоположно направленных векторов — будут.

Наряду с понятием коллинеарности векторов существует понятие *компланарности векторов*.

Определение 59. Три вектора называют компланарными, если изображающие их направленные отрезки лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.

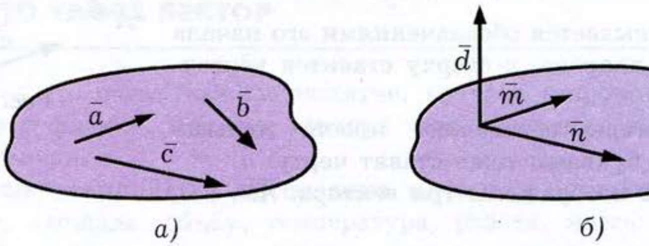


Рис. 13.4

На рис. 13.4а векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — компланарны, так как они лежат в одной плоскости. Если три вектора отложить от общего начала, то в случае компланарности они окажутся лежащими в одной плоскости, а в случае некомпланарности — не лежащими в одной плоскости. Векторы $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{d}$ на рис. 13.4б — не компланарны, так как они отложены от общего начала и в одной плоскости не лежат.

§ 13.3 РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

На рисунке к главе 13 (с. 196) мы видим, что все три направленных отрезка имеют одинаковую длину и одинаково направлены.

Введём определение *равных векторов*.

Определение 60. Вектор $\overline{AB}$ равен вектору $\overline{CD}$, если длины отрезков AB и CD равны и эти векторы одинаково направлены (сонаправлены).

Равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ записывают так: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Эта запись означает следующее:

1) векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ сонаправлены;

2) длины отрезков AB и CD равны (рис. 13.5).

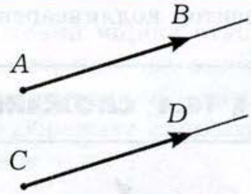


Рис. 13.5

Определение 61. Длиной вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB.

Иногда длину вектора называют также *модулем*, или *абсолютной величиной вектора*.

Для модуля вектора употребляется тот же знак, что и для модуля числа. Запись $|\overline{a}| = 5$ читается так: «длина (или модуль) вектора $\overline{a}$ равна 5».

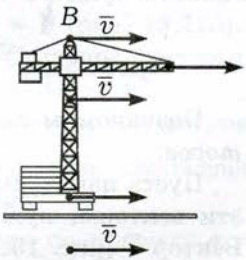


Рис. 13.6

? Как же на практике изображают с помощью векторов ту или иную векторную величину?

Этот процесс называют *откладыванием вектора от точки*.

Посмотрим на рис. 13.6. На нём изображён движущийся подъёмный кран. Теперь нас будет интересовать не перемещение крана, а скорость, с которой движется кран. Пусть кран движется со скоростью 3 м/с.

Обозначим эту скорость вектором $\overline{v}$. Направление вектора $\overline{v}$ совпадает с направлением движения крана. Выбрав масштаб, изобразим эту скорость соответствующим направленным отрезком. Такой вектор можно отложить от любой точки крана.

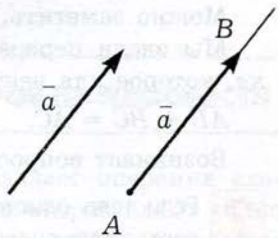


Рис. 13.7

На рис. 13.7 от точки A отложен вектор $\overline{AB}$, равный вектору $\overline{a}$.

Равные между собой векторы принято считать одним и тем же вектором, отложенным от различных точек.

Введём понятие *нулевого вектора*.

Определение 62. Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называется нулевым.

Нулевой вектор обозначается нулём с черточкой сверху: $\overline{0}$.

Из определения 62 следует, что длина нулевого вектора равна нулю, а направления он не имеет. Нулевой вектор иногда называют также *нуль-вектором*. Изображается нулевой вектор любой точкой, которая рассматривается как начало и конец этого вектора. Принято считать, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

§ 13.4 СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

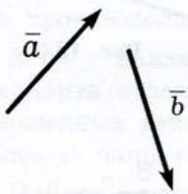


Рис. 13.8

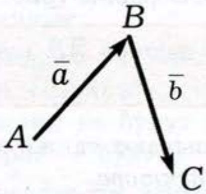


Рис. 13.9

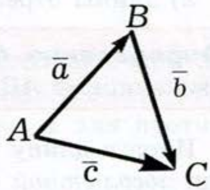


Рис. 13.10

Познакомимся с первой операцией над векторами — *сложением векторов*.

Пусть нам даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 13.8). Для того чтобы сложить эти векторы, нужно вектор $\overline{b}$ отложить от конца вектора $\overline{a}$ (рис. 13.9). Вектор $\overline{c}$ (рис. 13.10), начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец — с концом вектора $\overline{b}$, называется *суммой векторов* и обозначается $\overline{a} + \overline{b}$.

Можно заметить, что $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Мы ввели первое правило сложения векторов — *правило треугольника*, которое для векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ (рис. 13.10) можно записать так:

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Возникает вопрос:

? Если тело одновременно участвует в двух перемещениях, как найти сумму соответствующих векторов?

Для ответа на поставленный вопрос вернёмся к примеру с краном: пусть, двигаясь горизонтально со скоростью $\overline{v} = 3$ м/с, кран поднимает ящик со скоростью $\overline{v_1} = 1$ м/с.

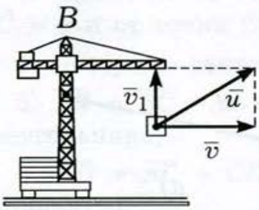


Рис. 13.11

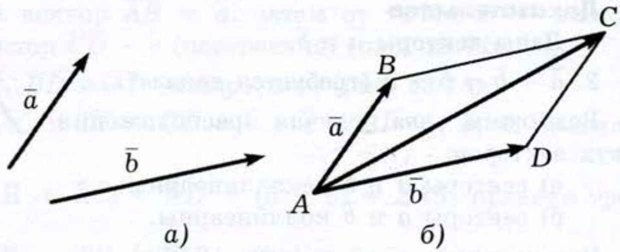


Рис. 13.12

На рис. 13.11 изображены в масштабе скорость движения ящика относительно крана $\overline{v}_1$, направленная вертикально вверх, и скорость движения крана $\overline{v}$, направление которой совпадает с направлением движения крана. Суммой векторов $\overline{v}$ и $\overline{v}_1$ является вектор $\overline{u}$, который изображает скорость ящика относительно неподвижной системы отсчёта: $\overline{u} = \overline{v} + \overline{v}_1$.

? Как осуществляется это сложение векторов?

Пусть нам даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, которые неколлинеарны, т. е. не лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 13.12а). Отложим эти векторы от некоторой точки A, т. е. $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AD} = \overline{b}$ (рис. 13.12б).

Тогда суммарный вектор изобразится диагональю $\overline{AC}$ параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$, $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

Мы получили ***правило параллелограмма для сложения двух векторов***:

! Если два вектора неколлинеарны, то их сумма изображается диагональю построенного на них (как на сторонах) параллелограмма.

Можно доказать, что сумма двух векторов, найденная по правилу треугольника, равна сумме этих векторов, найденной по правилу параллелограмма.

§ 13.5 СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ

Нам предстоит выяснить, какими свойствами обладает операция сложения векторов. Покажем, что операция сложения векторов имеет те же свойства, что и операция сложения чисел. В этом параграфе мы будем говорить о свойствах сложения векторов, лежащих в одной плоскости.

Теорема 58. Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется переместительный закон (коммутативность сложения векторов): $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

Доказательство

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (требуется доказать).

Возможны два случая расположения двух векторов:

а) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны;

б) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

Рассмотрим случай а) (рис. 13.13а).

3. Отложим от произвольной точки A векторы $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AD} = \overline{b}$ и построим на них параллелограмм $ABCD$ (построение) (рис. 13.13б).

Используя понятие равенства векторов, получим:

4. $\overline{BC} = \overline{b}$, $\overline{DC} = \overline{a}$ (1, 2, определение равенства векторов) (рис. 13.13б).

5. Из $\triangle ABC$: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{a} + \overline{b}$ (1, 4, правило треугольника для сложения векторов).

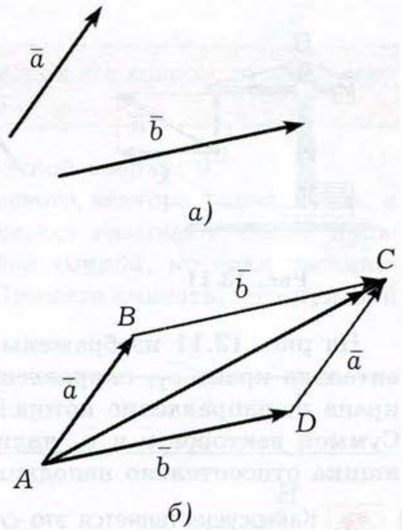


Рис. 13.13

6. Из $\triangle ADC$: $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{b} + \overline{a}$ (1, 4, правило треугольника для сложения векторов).

7(2). $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (5, 6). ■

Доказательство для случая б), когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, проведите самостоятельно.

Теорема 59. Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ выполняется сочетательный закон (ассоциативность сложения векторов): $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.

Доказательство

Докажем теорему сначала для случая, когда среди векторов нет коллинеарных.

1. $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — попарно неколлинеарные векторы (дано) (рис. 13.14а).

2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (требуется доказать).

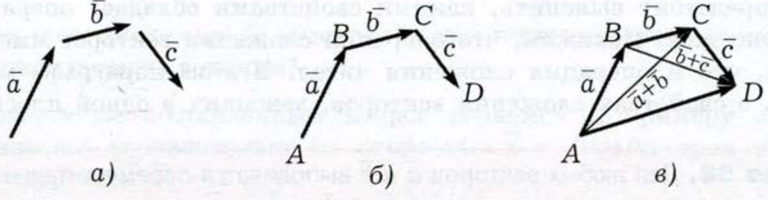


Рис. 13.14

3. Отложим от точки A вектор $\overline{AB} = \overline{a}$, затем от точки B — вектор $\overline{BC} = \overline{b}$ и от точки C — вектор $\overline{CD} = \overline{c}$ (построение) (рис. 13.14б).

4. Построим векторы $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ (построение) (рис. 13.14в).

5. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{a} + \overline{b} = \overline{AC}$ и $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{b} + \overline{c} = \overline{BD}$ (1, 3, 4, правило треугольника).

6. $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ (5, правило треугольника).

7. $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (5, правило треугольника).

8(2). $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (4, 5). ■

Этот закон выполняется и для случая, когда среди векторов есть два коллинеарных или все три вектора коллинеарны (проверьте это самостоятельно).

Из сочетательного и переместительного законов следует, что, складывая любое число векторов, можно как угодно переставлять и группировать слагаемые. Чтобы сложить несколько векторов, например векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, лежащие в одной плоскости (рис. 13.15а), удобно построить векторную ломаную (рис. 13.15б). Вектор $\overline{AE}$, соединяющий начало ломаной и её конец, и является суммой рассматриваемых векторов.

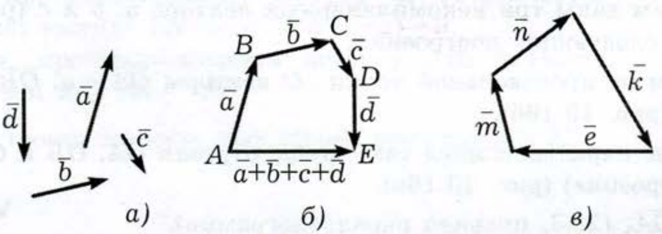


Рис. 13.15

Если ломаная получилась замкнутой, то сумма векторов равна нуль-вектору (рис. 13.15в), т. е. $\overline{m} + \overline{n} + \overline{k} + \overline{e} = \overline{0}$.

Отметим важное свойство нуль-вектора:

! Для любого вектора $\overline{a}$ выполняется равенство $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$.

Докажите это свойство самостоятельно.

§ 13.6* ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ДЛЯ СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Мы уже говорили о сложении трёх и более векторов, лежащих в одной плоскости.

Пусть нам даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, не лежащие в одной плоскости (некомпланарные). Возникает вопрос:

Как сложить эти векторы? Какое правило для этого можно применить?

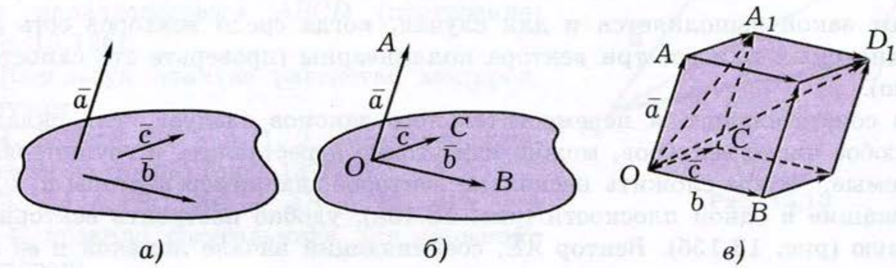


Рис. 13.16

1. Пусть нам даны три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (рис. 13.16а). Выполним следующие построения.

2. Отложим от произвольной точки O векторы $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$ и $\overline{OC} = \overline{c}$ (построение) (рис. 13.16б).

3. Построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его рёбрами (построение) (рис. 13.16в).

4. $\overline{a} + \overline{c} = \overline{OA_1}$ (2, 3, правило параллелограмма).

5. $\overline{A_1D_1} = \overline{b}$ (2, 3, определение равенства векторов).

6. $(\overline{a} + \overline{c}) + \overline{b} = \overline{OD_1}$ (3, 4, 5, правило параллелограмма).

Таким образом,

Сумма трёх некомпланарных векторов изображается диагональю параллелепипеда, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки, как на рёбрах (рис. 13.16в).

§ 13.7 РАЗНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Введём операцию *вычитания двух векторов*. Эта операция вводится так же, как и для чисел.

Определение 63. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, что $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.

Разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается так же, как и для чисел: $\overline{a}-\overline{b}$.

Введём понятие противоположного вектора.

Определение 64. Два вектора называются противоположными, если они противоположно направлены и имеют одинаковую длину.

Докажите самостоятельно, что сумма противоположных векторов равна нулевому вектору.

На рис. 13.17 изображены два противоположных друг другу вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\overline{a}+\overline{b}=\overline{0}$.

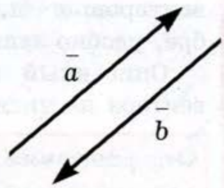


Рис. 13.17

Нуль-вектор считается противоположным самому себе.

Вектор, противоположный вектору $\overline{a}$, обозначается $-\overline{a}$ (читается: «минус вектор $\overline{a}$»). $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$.

Вектором, противоположным вектору $\overline{AB}$, является вектор $\overline{BA}$, так как $\overline{BA}=-\overline{AB}$.

? Как построить разность двух данных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

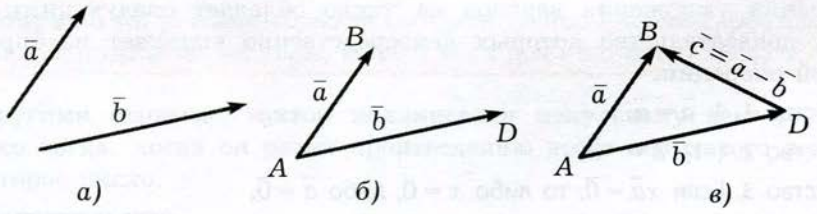


Рис. 13.18

1. Пусть нам даны два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (дано) (рис. 13.18а).
2. Построим разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
3. Отложим от произвольной точки A векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{AB}=\overline{a}$ и $\overline{AD}=\overline{b}$ (построение) (рис. 13.18б).
4. $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$, значит, $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$.

Вектор DB будет разностью векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, т.е. $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{a} - \overline{b}$ (4, определение разности векторов) (рис. 13.18в).

Построение разности двух коллинеарных векторов выполните самостоятельно.

! Равенство $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$ можно назвать *правилом нахождения разности двух векторов.*

§ 13.8 ОПЕРАЦИЯ УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО И ЕЁ СВОЙСТВА

Введём ещё одну операцию над векторами — *умножение вектора на число.*

После определения операции сложения векторов естественно может возникнуть потребность в сложении двух, трёх или более одинаковых векторов: $\overline{a} + \overline{a}$, $\overline{a} + \overline{a} + \overline{a}$, $\overline{a} + \overline{a} + \overline{a} + \overline{a}$ и т. д. Такие суммы, как и в алгебре, удобно записывать в виде $2\overline{a}$, $3\overline{a}$, $4\overline{a}$ и т. д.

Описанный процесс подсказывает определение операции умножения вектора на число.

Определение 65. Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число x $(x \neq 0)$ называется такой вектор $x\overline{a}$, который:

1) имеет длину $|x| \cdot |\overline{a}|$;

2) сонаправлен с вектором $\overline{a}$, если $x > 0$, и направлен противоположно вектору $\overline{a}$, если $x < 0$.

Если $\overline{a} = \overline{0}$ или $x = 0$, то вектор $x\overline{a} = \overline{0}$.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами, доказательство которых непосредственно вытекает из определения этой операции.

Свойство 1. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

Свойство 2. $(-1) \cdot \overline{a} = -\overline{a}$.

Свойство 3. Если $x\overline{a} = \overline{0}$, то либо $x = 0$, либо $\overline{a} = \overline{0}$.

Свойство 4. Если $x\overline{a} = x\overline{b}$ и $x \neq 0$, то $\overline{a} = \overline{b}$.

Свойство 5. Если $x\overline{a} = y\overline{a}$ и $\overline{a} \neq \overline{0}$, то $x = y$.

Докажите эти свойства самостоятельно.

Есть ещё два более сложных свойства операций над векторами, которые относятся уже одновременно к двум операциям над векторами: сложению и умножению вектора на число. Это два *распределительных* (или *дистрибутивных*) *закона*:

Свойство 6. $(x + y) \cdot \overline{a} = x\overline{a} + y\overline{a}$.

Свойство 7. $x(\overline{a} + \overline{b}) = x\overline{a} + x\overline{b}$.

Изучите формулировки этих законов и ответьте на вопрос:

? О каких векторах в этих законах идёт речь? Как они расположены в пространстве?

Оба эти свойства относятся к плоскости, так как выполняющиеся в них действия производятся с векторами, параллельными одной плоскости (или лежащими в одной плоскости).

Более того, свойство 6 касается лишь векторов, параллельных одной прямой (или лежащих на одной прямой).

§ 13.9 ПРИЗНАК КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ

Векторы часто помогают изучать свойства геометрических фигур. Например, нам нужно доказать, что прямые a и b параллельны (рис. 13.19а).

? Как доказать параллельность прямых с помощью векторов?

Рассмотрим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, лежащие соответственно на прямых a и b (рис. 13.19б).

Если мы докажем, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то по определению коллинеарности векторов получим, что прямые $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллельны.

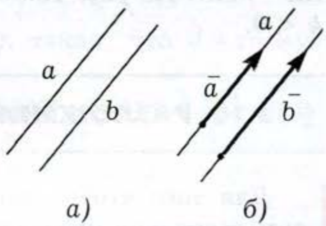


Рис. 13.19

Теорема 60 (о коллинеарности векторов). Вектор $\overline{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\overline{a}$ тогда и только тогда, когда $\overline{b} = x\overline{a}$ для некоторого числа x.

Другими словами, вектор коллинеарен ненулевому вектору тогда и только тогда, когда он равен произведению этого ненулевого вектора на некоторое число.

Доказательство

А. 1. Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, $\overline{a} \neq \overline{0}$ (дано).

2. Найдём такое число x, при котором выполняется равенство $\overline{b} = x\overline{a}$.

3. Если $\overline{b} \neq \overline{0}$, то рассмотрим отношение длин векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$.
Пусть $|\overline{b}| : |\overline{a}| = k$ или $|\overline{b}| = k\,|\overline{a}|$.

4. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправленные, то

$\overline{b} = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}$ (т.е. $x = k$) (1, 3, определение умножения вектора на число).

5. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены, то

$\overline{b} = -\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}$ (т.е. $x = -k$) (1, 3, определение умножения вектора на число).

6. Если же $\overline{b} = \overline{0}$, то $x = 0$.

Б. 1. Пусть при некотором x выполняется равенство $\overline{b} = x\overline{a}$ (дано).

2. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны (1, определение умножения вектора на число). ■

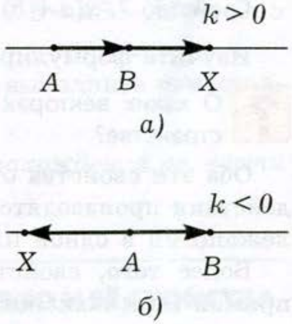


Рис. 13.20

Из теоремы Т.60 можно получить следствие:

! Два вектора, отложенные от одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.

То есть точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overline{AX} = k\overline{AB}$. На рис. 13.20а изображён случай, когда $k > 0$, на рис. 13.20б — $k < 0$.

§ 13.10 РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Для того чтобы понять смысл названия данного параграфа, рассмотрим несколько примеров.

1. Самолёт идёт на посадку. Его перемещение ($\overline{s}$) состоит из двух составляющих: вертикальной ($\overline{s}_{\text{вер.}}$) и горизонтальной ($\overline{s}_{\text{гор.}}$). Первая показывает снижение самолёта, вторая — смещение над землёй за время снижения (рис. 13.21). Истинное его движение происходит в направлении вектора $\overline{s}$, т.е. $\overline{s} = \overline{s}_{\text{вер.}} + \overline{s}_{\text{гор.}}$ (правило треугольника).

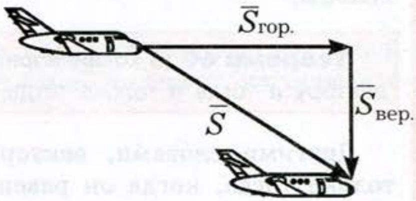


Рис. 13.21

2. Груз лежит или движется по наклонной поверхности. Сила тяжести (вектор $\overline{OP}$) разлагается на две составляющие: та, что направлена по перпендикуляру к поверхности (давление на неё), и та, что направлена вдоль поверхности (скатывающая сила) (рис. 13.22). То есть $\overline{OP} = \overline{ON} + \overline{OF}$ (правило параллелограмма).

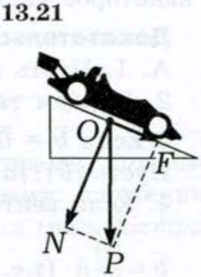


Рис. 13.22

В этих примерах происходит так называемое *разложение вектора на составляющие*.

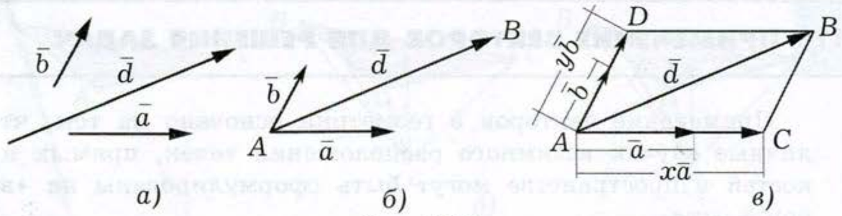


Рис. 13.23

Докажем теорему *о единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.*

Теорема 61. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два неколлинеарных вектора, лежащих в некоторой плоскости. Тогда для любого вектора $\overline{d}$, лежащего в этой плоскости, существует единственная пара чисел x и y, такая, что $\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b}$.

Доказательство

1. Пусть нам даны два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и произвольный вектор $\overline{d}$ (рис. 13.23а).

2. Существует единственная пара чисел x и y, такая, что $\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b}$ (требуется доказать).

3. Если вектор $\overline{d}$ коллинеарен одному из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$, скажем, $\overline{d} \parallel \overline{a}$, то по Т.60 $\overline{d} = x\overline{a}$, и, взяв $y = 0$, получим $\overline{d} = x\overline{a} + 0\overline{b}$.

4. Если $\overline{d} \nparallel \overline{a}$ и $\overline{d} \nparallel \overline{b}$, то отложим векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{d}$ от точки A (построение) (рис. 13.23б).

5. Построим параллелограмм $ABCD$ с диагональю AB и сторонами на прямых, на которых лежат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (построение) (рис. 13.23в) (1, 2).

6. $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{AD}$ (1, 5, правило параллелограмма для сложения векторов).

7. $\overline{AC} = x\overline{a}$ (5, свойства коллинеарных векторов) (рис. 13.23в).

8. $\overline{AD} = y\overline{b}$ (5, свойства коллинеарных векторов) (рис. 13.23в).

9. $\overline{AB} = \overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b}$ (6, 7, 8).

Мы доказали существование разложения вектора $\overline{d}$. Теперь докажем единственность такого разложения.

10. Пусть существует ещё одна пара чисел x_1 и y_1, таких, что $\overline{d} = x_1\overline{a} + y_1\overline{b}$ (предположение).

11. $x\overline{a} + y\overline{b} = x_1\overline{a} + y_1\overline{b}$ (2, 10).

12. $(x - x_1)\,\overline{a} = (y - y_1)\,\overline{b}$ (11, свойства операций над векторами).

13. Если теперь, скажем, $x - x_1 \neq 0$, то $\overline{a} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \overline{b}$, тогда по Т.60 $\overline{a} \parallel \overline{b}$, что противоречит условию.

14. Таким образом, $x - x_1 = 0$, откуда $x = x_1$, $y = y_1$. ■

§ 13.11* ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Применение векторов в геометрии основано на том, что различные случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве могут быть сформулированы на «векторном языке».

Решим с использованием векторов несколько геометрических задач.

Задача 1

Доказать, что если M — середина отрезка AB и O — произвольная точка, то выполняется равенство: $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$.

Решение

1. AB — отрезок, точка M — его середина. } (дано)
2. O — произвольная точка. } (рис. 13.24а)

3. $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ (требуется доказать).

На рис. 13.24а не изображены никакие векторы.

4. Введём обозначение векторов (рис. 13.24б).

5. $AM = MB$ (1, 4, определение середины отрезка).

Запишем некоторые векторные равенства, чтобы получить требуемое.

6. $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$ (1, 2, 4, правило вычитания векторов).

7. $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM}$ (1, 2, 4, правило вычитания векторов).

8. $\overline{OM} - \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{OM}$ (5, 6, 7).

9(3). $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ (8). ■

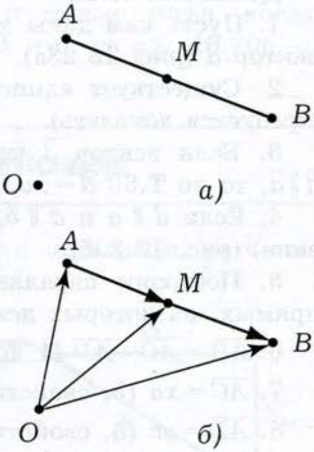


Рис. 13.24

Задача 2

Доказать, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC и O — произвольная точка пространства, то выполняется равенство:

$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

Решение

1. Треугольник ABC.
2. M — точка пересечения медиан ΔABC. } (дано)
3. O — произвольная точка пространства. } (рис. 13.25а)

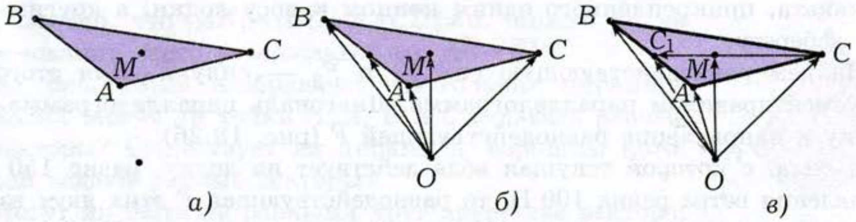


Рис. 13.25

4. $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ (рис. 13.25б) (требуется доказать).

Вспомним свойство медиан треугольника и используем результат предыдущей задачи.

5. Рассмотрим медиану CC_1 ΔABC (рис. 13.25в).

6. $\overline{MC_1} = \frac{1}{3}\,\overline{CC_1}$ (1, 2, 5, Т.46).

7. $\overline{OC_1} - \overline{OM} = \overline{MC_1} = \frac{1}{3}(\overline{OC_1} - \overline{OC})$ (6, правило нахождения разности векторов).

8. $\overline{OM} = \overline{OC_1} - \frac{1}{3}\,\overline{OC_1} + \frac{1}{3}\,\overline{OC} = \frac{2}{3}\,\overline{OC_1} + \frac{1}{3}\,\overline{OC}$ (7).

9. $\overline{OC_1} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ (2, 3, 5, задача 1).

10(4). $\overline{OM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) + \frac{1}{3}\,\overline{OC} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ (8, 9). ■

Задача 3

Как удержать в равновесии (на одном месте) лодку, на которую действуют течение реки и ветер, дующий от берега (рис. 13.26)?

Решение

Эта задача относится к так называемым прикладным задачам, которые сначала нужно «перевести на математический язык».

1. На лодку действуют две силы: $\overline{F}_1$ — сила ветра и $\overline{F}_2$ — скорость течения реки.

2. Ветер дует от берега, а это значит, что $\overline{F}_1 \perp \overline{F}_2$ (рис. 13.26).

3. Что значит «лодка находится в равновесии»? Это значит, что лодка неподвижна.

4. Для того чтобы лодка была неподвижна, к ней должна быть приложена уравновешивающая сила $\overline{F}_у$, равная равнодействующей силе $\overline{F}$, но направленная в противоположную сторону. Такой силой, например, может быть сила упру-

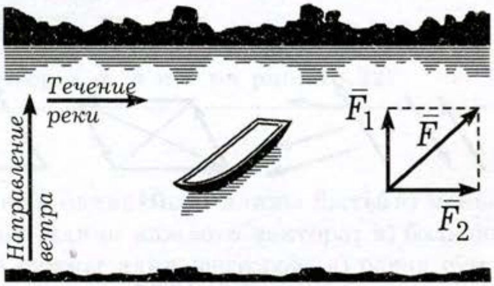


Рис. 13.26

гости каната, прикреплённого одним концом к носу лодки, а другим концом — к берегу.

5. Найдём равнодействующую сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ — силу $\overline{F}$. Для этого воспользуемся правилом параллелограмма. Диагональ параллелограмма даёт величину и направление равнодействующей $\overline{F}$ (рис. 13.26).

Если сила, с которой текущая вода действует на лодку, равна 150 Н, а сила давления ветра равна 100 Н, то равнодействующая $\overline{F}$ этих двух взаимно перпендикулярных сил может быть вычислена по теореме Пифагора:

$$|\overline{F}| = \sqrt{100^2 + 150^2} \approx 180 \text{ Н}.$$

Лодка может быть удержана канатом, способным выдержать натяжение не менее 180 Н.

Развиваем умения

К § 13.1–13.3

Н ⇓

1 Сколько различных векторов изображено на рис. 13.27?

2 На рис. 13.28 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Назовите векторы, равные вектору $\overline{AB}$.

б) Назовите векторы, равные вектору $\overline{DD_1}$.

в) Назовите векторы, равные вектору $\overline{AC}$.

Н ⇑

3 Сколько различных векторов задаёт: а) множество точек $\{A, B\}$; б) множество точек $\{A, B, C\}$; в) множество вершин равностороннего треугольника; г) множество вершин параллелограмма; д) множество вершин треугольной пирамиды?

4 Известно, что $\overline{AB} = \overline{CD}$. Можно ли на основании этого утверждать, что $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$?

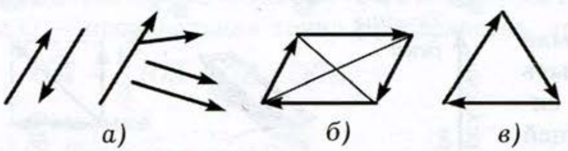


Рис. 13.27

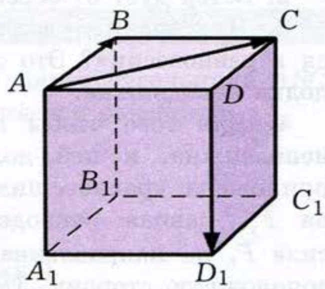


Рис. 13.28

5 Известно, что $|\overline{AB}|=|\overline{CD}|$ и $|\overline{CD}|\neq 0$. Можно ли на основании этого утверждать, что $\overline{AB}=\overline{CD}$?

6 На рис. 13.29 изображена треугольная пирамида $SABC$. Могут ли точки S, A, B и C задавать равные векторы? Существует ли пирамида, вершины которой задают равные векторы?

7 Могут ли быть не равными друг другу два вектора, изображаемые направленными отрезками равной длины, расположенными на одной прямой?

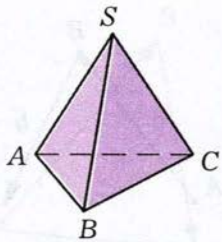


Рис. 13.29

Н

8 Середины двух отрезков AB и CD совпадают. Введите векторные обозначения и выпишите возможные векторные равенства.

9 Точки M и K — середины рёбер AB и DC куба. Отложите от точки K вектор, равный вектору $\overline{AM}$.

10 Дана равнобедренная трапеция. Выпишите коллинеарные векторы, определяемые вершинами трапеции.

П

11 Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ равны. Докажите, что если точки A, B, A_1 и B_1 не лежат на одной прямой, то четырёхугольник ABB_1A_1 — параллелограмм.

М

12 Даны два параллелограмма $ABCD$ и A_1BC_1D. Докажите, что $\overline{AA_1}=\overline{C_1C}$.

13 Дан треугольник ABC, BM — медиана этого треугольника, $\overline{MN}=\overline{BM}$. Докажите, что $\overline{AB}=\overline{NC}$.

К § 13.4–13.5

Н ⇓

14 Какой вектор является суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на рис. 13.30?

15 Какой вектор является суммой векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ на рис. 13.31?

16 Какой вектор является суммой векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ на рис. 13.32?

Н ⇓

17 Может ли длина суммы двух векторов одинаковой длины быть: а) меньше длины каждого вектора; б) равна длине каждого вектора; в) больше длины каждого вектора; г) больше суммы длин векторов; д) равна сумме длин векторов?

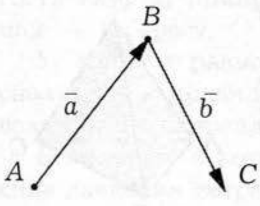


Рис. 13.30

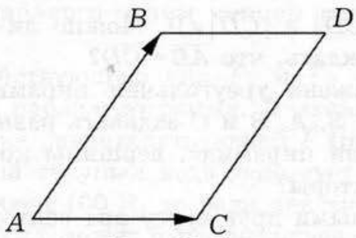


Рис. 13.31

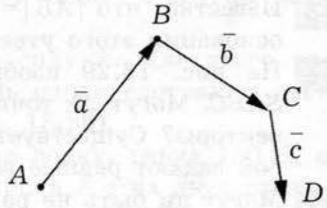


Рис. 13.32

18 При каком условии из трёх векторов можно образовать замкнутую ломаную?

19 Сложите два вектора по правилу параллелограмма. При каком условии сумма векторов направлена по биссектрисе угла параллелограмма?

Н

20 На тело действуют две взаимно перпендикулярные силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$. $|\overline{F_1}| = 8{,}5$ Н, $|\overline{F_2}| = 3{,}6$ Н. Найдите абсолютную величину суммы этих векторов.

21 Найдите сумму следующих векторов:

а) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$;

б) $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QT}$;

в) $\overline{AB} + \overline{MN} + \overline{DC} + \overline{CA} + \overline{PQ} + \overline{NM}$;

г) $\overline{FK} + \overline{MQ} + \overline{KP} + \overline{AM} + \overline{QK} + \overline{PF}$;

д) $\overline{KM} + \overline{DF} + \overline{AC} + \overline{FK} + \overline{CD} + \overline{PA} + \overline{MP}$.

П

22 Даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{d}$. Постройте вектор $\overline{c}$, такой, чтобы $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{d}$.

23 В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. Докажите, что $\overline{AM} - \overline{BN} = 1{,}5 \cdot \overline{AB}$.

М

24 Дан треугольник ABC. Докажите, что если M — точка пересечения его медиан, то $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$.

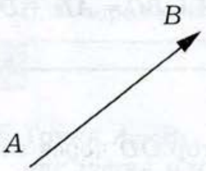


Рис. 13.33

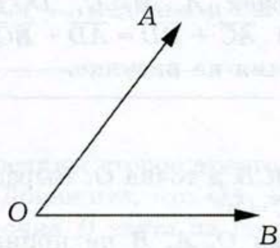


Рис. 13.34

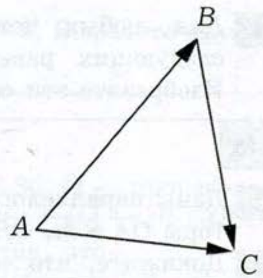


Рис. 13.35

К § 13.7

Н ⇓

25 ● На рис. 13.33 изображён вектор $\overline{AB}$. Укажите вектор, противоположный вектору $\overline{AB}$.

26 ● На рис. 13.34 изображены векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Укажите вектор, равный $\overline{OA}-\overline{OB}$.

Н ⇑

27 ● Какой из векторов на рис. 13.35 равен разности двух других?

28 Известно, что $\overline{m}+\overline{n}=\overline{d}$. Какой из этих векторов можно назвать разностью двух других?

29 Как расположены векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ коллинеарны?

30 Может ли выполняться равенство $|\overline{CA}+\overline{CB}|=|\overline{CA}-\overline{CB}|$?

Н

31 Даны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Найдите сумму вектора $\overline{AB}$ и вектора, противоположного вектору $\overline{CD}$.

32 Даны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Найдите разность вектора $\overline{CD}$ и вектора, противоположного вектору $\overline{AB}$.

33 Упростите выражения:

а) $\overline{OP}-\overline{EP}+\overline{KD}-\overline{BD}$;

б) $\overline{AD}+\overline{MP}+\overline{EK}-\overline{EP}-\overline{MD}$.

П

34 Сравните числа $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}|+|\overline{b}|$, если: а) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены; б) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. Чему равна длина $|\overline{a}+\overline{b}|$, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены?

35 Для любых четырёх точек A, B, C, D докажите справедливость следующих равенств: а) $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$; б) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC}$. Изобразите эти соотношения на рисунке.

М

36 Даны параллелограмм $ABCD$ и точка O. Выразите вектор $\overline{OD}$ через векторы $\overline{OA} = \overline{m}$, $\overline{OB} = \overline{n}$, $\overline{OC} = \overline{p}$.

37 Докажите, что если точки O, A, B не принадлежат одной прямой и $\overline{OC} = \overline{OA} - \overline{OB}$, то четырёхугольник $OBAC$ — параллелограмм.

К § 13.8

Н ⇓

38 Даны два вектора $\overline{a}$ и $3\overline{a}$. Что можно сказать о направлениях этих векторов и их длине?

Н ⇑

39 Даны векторы $\overline{a}$ и $k\overline{a}$. При каких значениях k эти векторы: а) сонаправлены; б) противоположно направлены?

Н

40 Выполнив необходимые измерения, выразите вектор $\overline{MN}$ (рис. 13.36) через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

41 Докажите, что в параллелограмме $ABCD$ выполняется равенство $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{BC}$.

42 Точка P — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overline{PC}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

П

43 В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — соответственно середины сторон CD и AD. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{CB} = \overline{a}$ и $\overline{DC} = \overline{b}$.

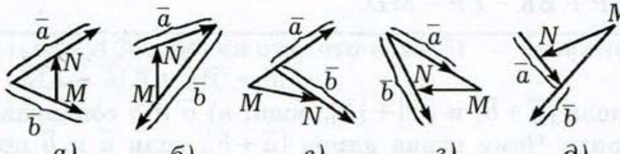


Рис. 13.36

44 В треугольнике ABC CM — медиана и $\overline{CB} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$. Выразите вектор $\overline{CM}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

М

45 Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, Q — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overline{QA_1} + \overline{QB_1} + \overline{QC_1} = \overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}$.

46 В треугольнике ABC точка D взята на стороне AC так, что $AC : DC = m : n$. Выразите векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ через $\overline{AC} = \overline{a}$ и $\overline{BD} = \overline{b}$.

47 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны AD, а точка N – середина стороны BC. Докажите, что $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$.

М

48 Дана прямая AB и точка O вне её.

а) Докажите, что точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overline{OX} = t \cdot \overline{OA} + z \cdot \overline{OB}$, где $t + z = 1$.

б) Докажите, что точка X лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда числа t и z из пункта а) неотрицательны.

в) Докажите, что точка X лежит на луче AB, но вне отрезка AB тогда и только тогда, когда число t из пункта а) отрицательно.

г) При каком условии точка X лежит на луче AB, но вне отрезка AB?

д) При каком условии точка X совпадает с точкой A? с точкой B?

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Последовательное выполнение двух осевых симметрий на плоскости относительно разных прямых.

ВАША РОЛЬ. Эксперт в области геометрии.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Восьмиклассник Вася представил рукопись, в которой утверждает, что открыл новый вид изометрии на плоскости. Он предлагает взять любые две прямые и выполнить осевую симметрию сначала относительно первой прямой, а затем относительно второй.

ЗАДАНИЕ. Установите, является ли предложенная Васей изометрия одной из изученных вами ранее или не является. Зависит ли ответ на поставленный вопрос от того, какие прямые выбраны?

РАЗДЕЛ 5

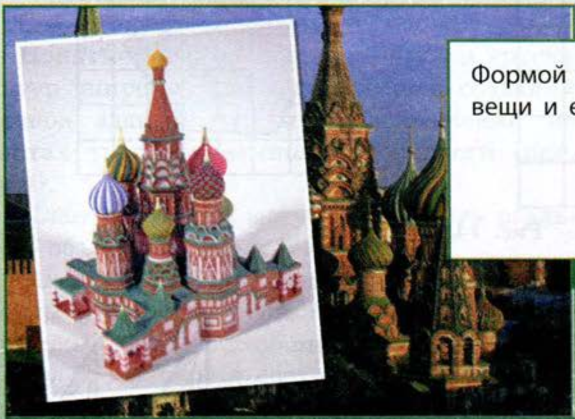
ПОДОБИЕ И ГОМОТЕТИЯ

Эти пропорции, если они будут правильно поняты, могут быть использованы живописцами, скульпторами, работающими по дереву и камню, золотых дел мастерами, литейщиками металла, горшечниками, которые лепят из глины, и всеми, кому приходится делать изображения.

Альбрехт Дюрер
(немецкий живописец и график, 1471–1528)

Глава 14

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Формой я называю суть бытия каждой вещи и её первую сущность...

Аристотель
(древнегреческий философ и учёный, 384–322 до н.э.)

Открываем новые знания

§ 14.1 ПОНЯТИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В геометрии и в окружающем нас мире встречаются фигуры, которые имеют одинаковые формы, но разные размеры. Мыльный пузырь и футбольный мяч, небольшая модель ледохода и сам корабль, фотоснимки разных размеров (рис. 14.1). Такие фигуры называются *подобными*.

Для обозначения подобия фигур используется знак ~. На рис. 14.2 изображены две подобные фигуры F_1 и F_2. Запись $F_1 \sim F_2$ читается: «фигура F_1 подобна фигуре F_2».

а) *б)*

Рис. 14.1

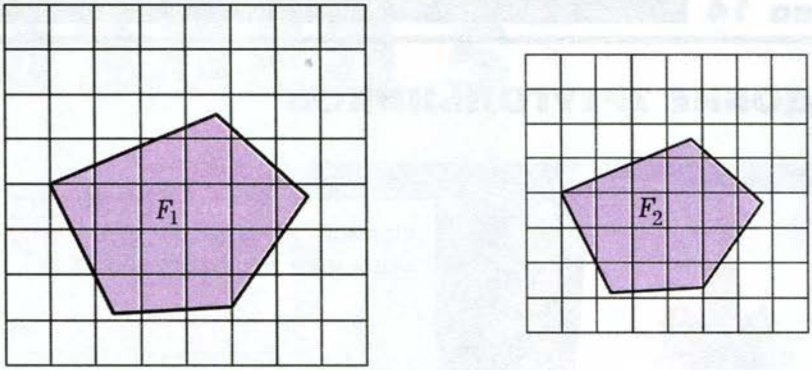


Рис. 14.2

На рис. 14.3 изображены два чертёжных прямоугольных треугольника с острыми углами в 60° и 30°. Стороны второго треугольника в два раза меньше сторон первого:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=2.$$

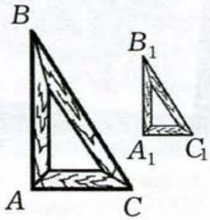


Рис. 14.3

Такие треугольники называют *подобными*. Стороны, лежащие против равных углов, называют *сходственными*.

Определение 66. Два треугольника называются подобными, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого, а сходственные стороны пропорциональны.

Подобие треугольников записывается так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Аналогично тому как это принято для записи равенства треугольников (с. 67, самый конец § 5.4), при записи подобия треугольников считают, что соответственными друг другу (а значит, равными) являются углы, обозначенные первыми буквами (у нас $\angle A = \angle A_1$), вторыми буквами ($\angle B = \angle B_1$), третьими буквами ($\angle C = \angle C_1$). Тогда соответственными (а значит, пропорциональными) будут стороны: AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

Отношение сходственных сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия*. Коэффициентом подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ на рис. 14.3 будет число 2 (берётся отношение стороны треугольника, указанного первым, к сходственной стороне треугольника, указанного вторым).

Сравнивая понятия равенства и подобия треугольников, можно сделать следующие выводы:

> **!** Если треугольники равны, то они подобны с коэффициентом подобия, равным 1.

> **!** Если треугольники подобны, то они не обязательно равны.

Самостоятельно обоснуйте эти выводы.

Понятие подобия треугольников и других фигур широко используется при создании планов зданий или при изображении на картах участков земной поверхности (рис. 14.4).

План или карта могут изображать реальный объект в разных *масштабах*.

Масштаб — это коэффициент подобия карты или плана и реального объекта. Например, если масштаб карты 1 : 1 000 000, это значит, что одному сантиметру изображения соответствует 1 000 000 см, или 10 км, реального расстояния.

Рис. 14.4

§ 14.2 ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Чтобы узнать, подобны ли два данных треугольника, требуется по определению проверить, равны ли соответствующие углы и пропорциональны ли сходственные стороны. Кроме этого, существуют другие, более простые способы установления подобия двух треугольников.

> **?** Пусть нам дан треугольник *ABC*. Как, выполнив некоторые построения, получить треугольник, подобный данному?

Теорема 62 (лемма о подобии треугольников). Прямая, пересекающая две стороны треугольника и проведённая параллельно третьей стороне, отсекает треугольник, подобный данному.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l}1.\ \Delta ABC.\\ 2.\ DE \parallel AC.\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{(дано)}\\ \text{(рис. 14.5а)}\end{array}$$

3. $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ (требуется доказать).

Для доказательства подобия треугольников согласно определению 66 мы должны доказать равенство соответствующих углов и пропорциональность сходственных сторон этих треугольников.

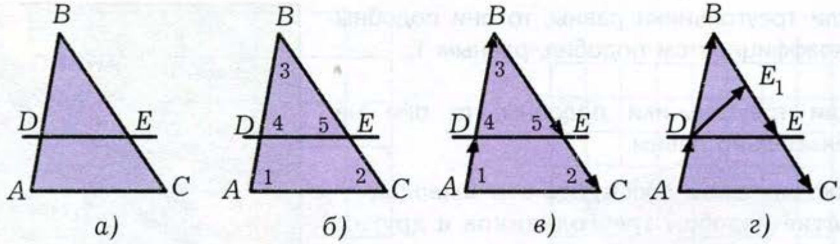


Рис. 14.5

4. Введём обозначение углов треугольников (рис. 14.5б).

5. $\angle 3$ — общий угол ΔDBE и ΔABC (1, 2, 4) (рис. 14.5б).

6. $\angle 4 = \angle 1$ (2, 4, свойство углов при пересечении параллельных прямых секущей).

7. $\angle 5 = \angle 2$ (2, 4, свойство углов при пересечении параллельных прямых секущей).

Для доказательства пропорциональности сходственных сторон применим векторный метод доказательства.

8. Введём векторные обозначения (рис. 14.5в).

9. Векторы $\overline{DB}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны (8, определение коллинеарных векторов).

10. Существует такое положительное число x, что $\overline{DB} = x\overline{AB}$ и $\dfrac{DB}{AB} = x$, (9, свойство коллинеарных векторов — Т.60).

11. Векторы $\overline{BE}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны, значит, существует такое положительное число y, что $\overline{BE} = y\overline{BC}$ и $\dfrac{BE}{BC} = y$ (1, 2, свойство коллинеарных векторов).

Из наглядных соображений можно предположить, что $x = y$.

12. $x = y$ (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

13. Предположим, что $x \neq y$ (предположение).

14. Умножив вектор $\overline{BC}$ на x, получим $\overline{BE_1} = x \cdot \overline{BC}$ (рис. 14.5г) (1, 12).

15. $\overline{DE_1} = \overline{DB} + \overline{BE_1} = x \cdot \overline{AB} + x \cdot \overline{BC} = x \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = x \cdot \overline{AC}$, т. е. $\overline{DE_1} = x \cdot \overline{AC}$ (1, 14).

16. $DE_1 || AC$ (15, свойство коллинеарных векторов).

Посмотрим на рис. 14.5г.

17. $DE || AC$ и $DE_1 || AC$ (2, 16).

Пункт 17 противоречит аксиоме параллельности прямых А.5, значит, предположение 13 неверно.

12. $x = y$.

18. DE_1 совпадает с DE и $DE = x \cdot AC$ (11, 17).

19. $DB = x \cdot AB$, $BE = x \cdot BC$ и $DE = x \cdot AC$, значит,

$\frac{DB}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = x$ (10, 11, 18).

20(3). $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ (5, 6, 7, 19, определение подобных треугольников). ■

Теорема 62 позволяет легко построить треугольник, подобный данному. Для этого достаточно провести прямую, пересекающую две стороны треугольника, параллельно третьей стороне.

Сформулируем и докажем *признаки подобия двух треугольников*.

Теорема 63 (первый признак подобия — по двум углам). Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого.

Доказательство

$$\left.\begin{array}{l}1.\ \Delta ABC \text{ и } \Delta A_1B_1C_1.\\ 2.\ \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1.\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{(дано)}\\ \text{(рис. 14.6)}\end{array}$$

3. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (требуется доказать).

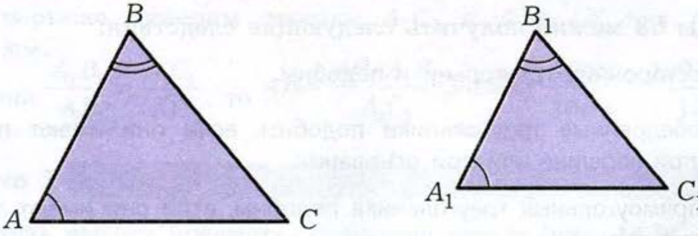


Рис. 14.6

Для доказательства воспользуемся определением 66 и докажем, что у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы равны и сходственные стороны пропорциональны.

4. $\angle C = \angle C_1$ (1, 2, теорема о сумме углов треугольника).

Если, скажем, $AB = A_1B_1$, то треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам, а значит, подобны.

5. Если, скажем, $A_1B_1 < AB$, то отложим от вершины B на стороне AB треугольника ABC отрезок BM, равный отрезку A_1B_1 (построение) (рис. 14.7).

6. Через точку M проведём прямую $MN \parallel AC$ (построение) (рис. 14.7).

7. $\Delta MNB \sim \Delta ACB$ (рис. 14.7) (1, 6, Т.62).

Если мы докажем, что $\Delta MNB = \Delta A_1C_1B_1$, то тогда ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ будут подобны.

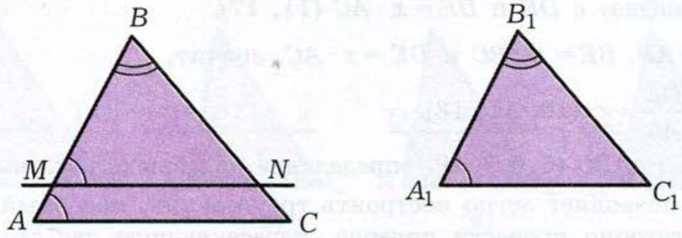


Рис. 14.7

8. $\angle B = \angle B_1$ (1).

9. $MB = A_1B_1$ (5).

10. $\angle BMN = \angle A$ (6, свойства равенства углов при пересечении параллельных прямых секущей).

11. $\angle A = \angle A_1$ (2).

12. $\angle BMN = \angle A_1$ (10, 11).

13. $\Delta MNB = \Delta A_1B_1C_1$ (8, 9, 12, признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим углам).

14(3). $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (7, 13, свойство подобных фигур). ■

Из теоремы 63 можно получить следующие следствия:

!

1. Равносторонние треугольники подобны.
2. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу при вершине или при основании.
3. Два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют по равному острому углу.
4. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.

Докажите эти следствия самостоятельно.

Т.63 и следствия из неё часто применяются при решении задач.

Задача 1

Определить расстояние от точки A до точки B, находящейся в недоступном месте, например на островке, окружённом водой (рис. 14.8а).

Решение

1. Даны точки A и B (недоступная).
2. Требуется найти расстояние AB.

Чтобы воспользоваться для решения задачи теоремой 63, можно мысленно построить треугольник ABC, одной из сторон которого будет отрезок AB, а затем рассмотреть $\Delta A_1B_1C_1$, подобный ΔABC, в котором можно выполнить все необходимые измерения.

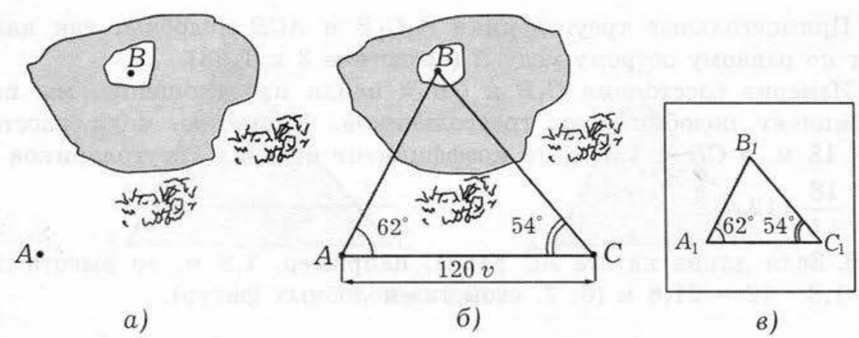


Рис. 14.8

3. Проведём на местности отрезок AC и измерим его. Пусть его длина равна 150 м (рис. 14.8б).

4. Измерим с помощью астролябии углы BAC и BCA. Пусть они равны 62°, 54°.

5. На листе бумаги построим треугольник $A_1B_1C_1$ с углами в 62° и 54° (рис. 14.8в).

6. Этот треугольник будет подобен треугольнику ABC (1, 3, 4, первый признак подобия треугольников — Т.63).

7. На чертеже измерим отрезки A_1C_1 и A_1B_1. У нас $A_1C_1 = 15$ мм, $A_1B_1 = 12$ мм.

8. Так как $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$, то $AB = \dfrac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1} = 150\text{м} \cdot \dfrac{12\text{мм}}{15\text{мм}} = \dfrac{150 \cdot 12}{15}\text{м} = 120\text{ м}.$

Задача 2

Определить высоту предмета, например дерева (рис. 14.9).

Решение

1. Имеется дерево — отрезок A_1C_1 (рис. 14.9).

2. Требуется найти высоту дерева — длину отрезка A_1C_1.

Воспользуемся теоремой 63.

3. Поставим по отвесу на горизонтальной площадке на некотором расстоянии от основания дерева шест с вращающейся планкой (на рис. 14.9 он также изображён отдельно).

4. Планку установим по направлению на вершину дерева, как это показано на рис. 14.9.

5. Отметим на поверхности земли точку B, являющуюся точкой пересечения прямой AA_1 с горизонтальной площадкой.

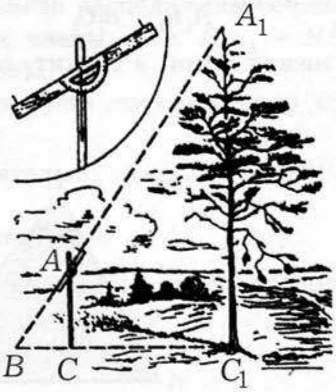


Рис. 14.9

6. Прямоугольные треугольники A_1C_1B и ACB подобны, так как они имеют по равному острому углу B (следствие 3 к Т.63).

7. Измерив расстояния C_1B и CB и найдя их отношение, мы найдём коэффициент подобия этих треугольников. Например, если расстояние $C_1B = 18$ м, а $CB = 1{,}5$ м, то коэффициент подобия треугольников будет равен $\frac{18}{1{,}5} = 12$.

8(2). Если длина катета AC равна, например, 1,8 м, то высота дерева равна $1{,}8 \cdot 12 = 21{,}6$ м (6, 7, свойство подобных фигур).

§ 14.3 ДРУГИЕ ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Докажем ещё два признака подобия треугольников.

Теорема 64 **(второй признак подобия — по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними).** Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, лежащие между ними, равны.

Доказательство

1. ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.
2. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, $\angle B = \angle B_1$.

$\Big\}$ (дано) (рис. 14.10)

3. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (требуется доказать).

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = 1$, то треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, подобны.

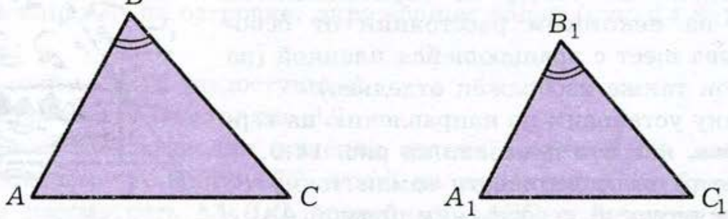


Рис. 14.10

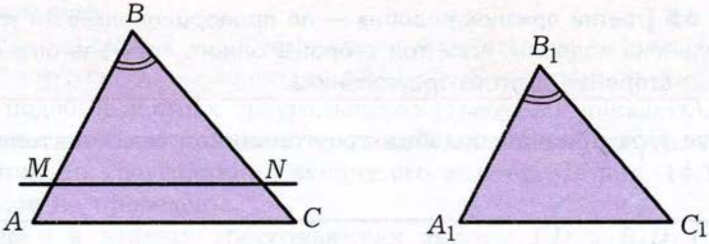


Рис. 14.11

4. Если, скажем, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} > 1$, то отложим на стороне AB треугольника ABC от вершины B отрезок BM, равный отрезку A_1B_1 (построение) (рис.14.11).

5. Через точку M проведём прямую $MN \| AC$ (построение) (рис. 14.11).

6. $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ (5, Т.62).

Итак, мы знаем, что $\Delta MBN \sim \Delta ABC$. Если мы докажем, что $\Delta MBN = \Delta A_1B_1C_1$, то теорема будет доказана.

7. Докажем, что $\Delta MBN = \Delta A_1B_1C_1$.

8. $\angle B = \angle B_1$ (1, 2).

9. $MB = A_1B_1$ (1, 4).

10. $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{NB}$ (1, 5, свойство подобных треугольников).

11. Рассмотрим пропорции $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ и $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{NB}$, а также равенство $A_1B_1 = MB$ (2, 10).

В этих двух пропорциях имеется по три одинаково расположенных равных члена, следовательно, равны и четвёртые их члены, т. е. $B_1C_1 = NB$ (проверьте это свойство пропорций самостоятельно).

12. $\Delta MBN = \Delta A_1B_1C_1$ (8, 9, 11, признак равенства треугольников по трём сторонам).

13(3). Так как $\Delta MBN = \Delta A_1B_1C_1$, то, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (7, 12, свойство подобных фигур). ■

Из теоремы 64 можно получить следующее следствие:

! Прямоугольные треугольники подобны, если катеты одного из них пропорциональны катетам другого.

Теорема 65 (третий признак подобия — по пропорциональности трёх сторон). Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника.

Докажите этот признак подобия треугольников самостоятельно.

§ 14.4 СВОЙСТВА ПОДОБНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Определение подобных многоугольников похоже на определение подобных треугольников. Если стороны одного многоугольника пропорциональны сторонам другого многоугольника и углы этих многоугольников соответственно равны, то такие многоугольники называют подобными.

На рис. 14.12 изображены два подобных пятиугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$. У этих пятиугольников $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$, а также

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

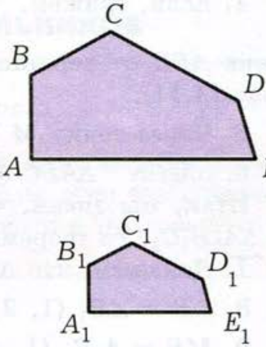


Рис. 14.12

Рассмотрим *некоторые свойства подобных многоугольников*.

Теорема 66. Отношение периметров подобных многоугольников равно отношению их соответственных сторон (коэффициенту подобия).

Докажите эту теорему самостоятельно.

Нетрудно заметить, что квадраты всегда подобны (обоснуйте этот вывод). Пусть даны два квадрата со сторонами a_1 и a_2 и $a_2 = ka_1$. Площади этих квадратов будут равны соответственно $S_1 = a_1^2$ и $S_2 = a_2^2 = k^2 a_1^2$, и тогда $\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{k^2 a_1}{a_1^2} = k^2$.

Докажем теорему об отношении площадей подобных треугольников.

Теорема 67. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

1. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$; k — коэффициент подобия (дано) (рис. 14.13а).

2. $S_1 : S = k^2$, где S_1 — площадь $\Delta A_1B_1C_1$, S — площадь ΔABC, k — коэффициент подобия данных треугольников (требуется доказать).

Нам нужно найти отношения площадей подобных треугольников, а в формулу площади треугольника входит его высота. На рис. 14.13а высоты треугольников не проведены.

3. Проведём в данных треугольниках высоты BD и B_1D_1 (построение) (рис. 14.13б).

Мы получим две пары прямоугольных треугольников.

Нам лучше выразить стороны и высоту одного треугольника через стороны и высоту другого. Для этого докажем подобие полученных прямоугольных треугольников.

Рассмотрим $\Delta A_1B_1D_1$ и ΔABD.

4. $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1D_1A_1 = \angle BDA = 90°$ (1, 3).

5. $\Delta A_1B_1D_1 \sim \Delta ABD$ (4, первый признак подобия треугольников — Т.63).

6. $B_1D_1 : BD = A_1B_1 : AB = k$ (1, 5).

7. $B_1D_1 = kBD$ (6).

8. $A_1C_1 : AC = A_1B_1 : AB = k$ (1).

9. $A_1C_1 = kAC$ (8).

10. $S_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 = \frac{1}{2}\ kAC \cdot kBD = k^2 \cdot \frac{1}{2}\ AC \cdot BD = k^2\ S$ (7, 9, Т.53).

11(2). $S_1 : S = k^2$ (10). ■

Можно доказать справедливость этого свойства и для многоугольников.

Теорема 68. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Докажите эту теорему самостоятельно, разбив данные многоугольники на треугольники и воспользовавшись Т.67.

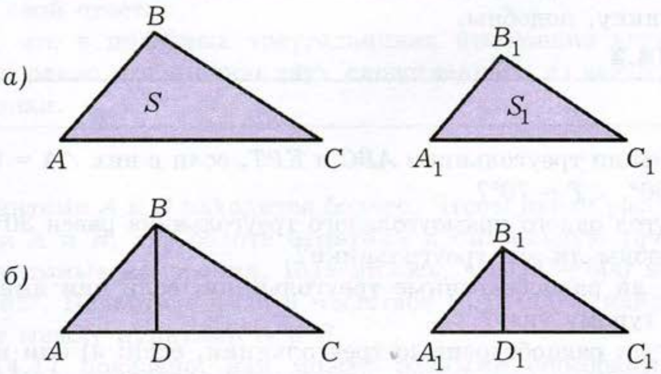


Рис. 14.13

Развиваем умения

К § 14.1

Н ⇓

1 Даны два подобных треугольника ABC и MKD. Какими свойствами обладают: а) их углы; б) их стороны?

Н ⇑

2 Подобны ли два любых равных треугольника?

3 Равны ли два любых подобных треугольника?

Н

4 Стороны одного (меньшего) треугольника равны 4 дм, 3,6 дм и 2,5 дм. Вычислите длины сторон другого треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия этих треугольников равен 1,6.

5 На рис. 14.14 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, длины некоторых сторон указаны. Найдите x и y.

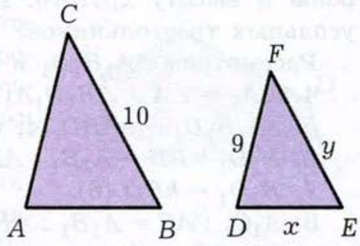


Рис. 14.14

6 В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны AB, BC и AC соответственно равны 20, 18 и 15 см. Сторона A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равна 10 см. Чему равны стороны A_1B_1 и B_1C_1?

П

7 Стороны данного треугольника равны 12,6 м, 16,5 м и 18 м. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его меньшая сторона равна большей стороне данного треугольника.

8 Докажите, что два треугольника, подобные одному и тому же третьему треугольнику, подобны.

К § 14.2–14.3

Н ⇓

9 Подобны ли треугольники ABC и KPT, если в них $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle P = 60°$, $\angle T = 70°$?

10 Острый угол одного прямоугольного треугольника равен 30°, а другого — 60°. Подобны ли эти треугольники?

11 Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют по одному равному тупому углу?

12 Подобны ли равнобедренные треугольники, если: а) они имеют по прямому углу; б) один из острых углов первого треугольника равен одному из острых углов второго треугольника?

Н

13 Постройте произвольный треугольник и проведите прямую, параллельную одной из его сторон, так, чтобы коэффициент подобия отсечённого и данного треугольников был равен: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{3}{4}$.

14 В прямоугольном треугольнике опущена высота на гипотенузу. Сколько пар подобных треугольников образовалось на этом чертеже?

15 Сколько пар подобных треугольников изображено на рис. 14.15?

16 В треугольнике проведены все средние линии. Сколько образовалось: а) треугольников, подобных данному; б) пар подобных треугольников?

17 Найдите подобные треугольники на рис. 14.16а — 14.16г и объясните, почему они подобны.

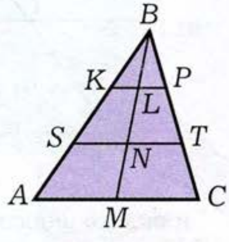


Рис. 14.15

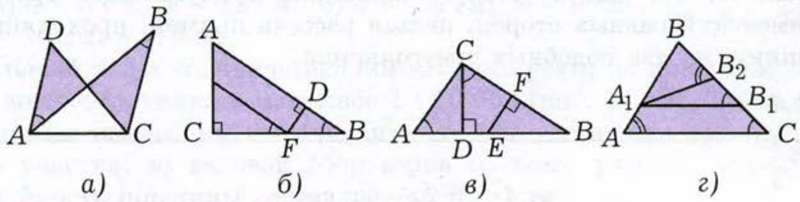


Рис. 14.16

П

18 На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Будут ли подобны треугольники ACD и ABF? Обоснуйте свой ответ.

19 Докажите, что в подобных треугольниках отношение двух сходственных сторон равно отношению двух сходственных: а) высот; б) биссектрис; в) медиан.

М

20 Между пунктами A и B находится болото. Чтобы найти расстояние между точками A и B, вне болота отметили произвольную точку C и провели необходимые измерения. Выяснилось, что $AC = 600$ м, $BC = 400$ м и $\angle ABC = 62°$. Начертите план в масштабе $1 : 10\,000$ и найдите по нему расстояние между пунктами A и B.

21 На рис. 14.17 показано, как можно разными способами определить ширину реки AB, построив на местности подобные треугольники. Для

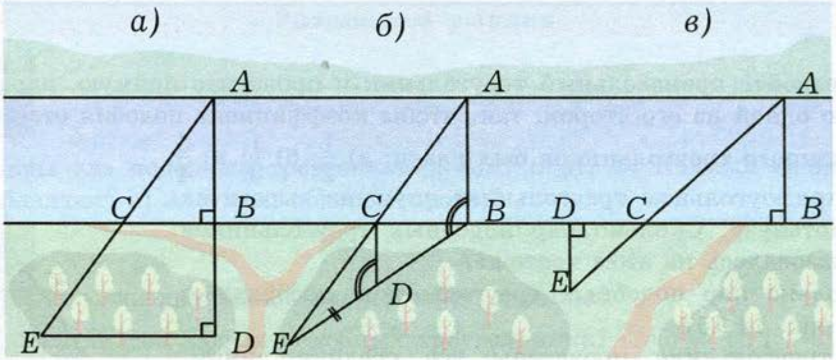


Рис. 14.17

каждого способа определите, какие построения выполнены, как с их помощью найти ширину реки. Выполните необходимые измерения и вычислите ширину реки (масштаб рисунков 1 : 1 000).

22 Докажите, что любой остроугольный или тупоугольный треугольник, не имеющий равных сторон, нельзя рассечь прямой, проходящей через вершину, на два подобных треугольника.

К § 14.4

Н ⇑

23 Даны два подобных многоугольника. Как найти их коэффициент подобия?

24 Объясните, почему: а) все равные многоугольники подобны; б) все квадраты подобны.

25 Как изменится площадь многоугольника, если каждая из его сторон: а) увеличится в n раз; б) уменьшится в k раз?

Н

26 Найдите отношение площадей двух квадратов, если отношение сторон этих квадратов равно: а) 1 : 2; б) 2 : 3; в) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; г) 1 : 1,5; д) $k : l$.

27 Как относятся стороны двух квадратов, если отношение площадей этих квадратов равно: а) 4 : 9; б) 3 : 4; в) 0,5 : 2; г) $p : t$?

28 Как разбить подобные многоугольники на одинаковое число подобных треугольников на рис. 14.18? Возможны ли различные способы разбиения подобных многоугольников на одинаковое число соответственно подобных треугольников? Приведите пример.

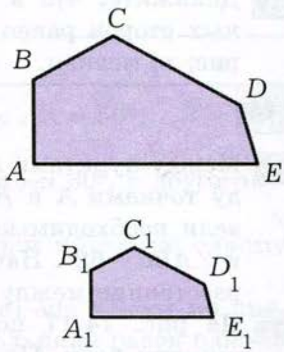


Рис. 14.18

29 Постройте два подобных прямоугольника с коэффициентом подобия, равным: а) 1,5; б) $\frac{1}{4}$.

30 Меньшие стороны двух подобных многоугольников равны 35 см и 21 см, а разность их периметров — 40 см. Определите периметр каждого многоугольника.

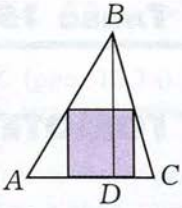


Рис. 14.19

П

31 Периметр параллелограмма равен 24 мм. На продолжениях его диагоналей от вершин отложены отрезки, равные соответствующим диагоналям. Вычислите периметр четырёхугольника, вершинами которого служат конечные точки отложенных отрезков.

32 В треугольник ABC вписан квадрат (рис. 14.19). Определите площадь квадрата, если $AC = a$ и $BD = h$. Произведите вычисления для случаев: а) $a = 5$ см, $h = 12$ см; б) $a = 4{,}5$ см, $h = 9$ см; в) $a = 15$ дм, $h = 3$ м.

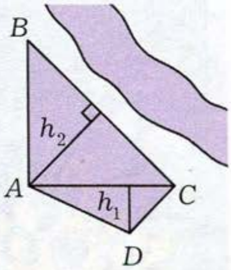


Рис. 14.20

33 Земельный участок, прилегающий к пойме реки, на плане изображён в виде многоугольника в масштабе 1 : 10 000 (рис. 14.20). Выполните необходимые измерения и вычислите: а) длину границы участка; б) площадь участка; в) валовой сбор зерна со всего участка, если средняя урожайность пшеницы составляет 45 ц с 1 га.

М

34 Постройте квадрат, площадь которого равна: а) четвёртой части площади данного квадрата; б) половине площади данного квадрата.

35 Постройте треугольник, подобный данному, площадь которого равна: а) половине площади данного треугольника; б) четвёртой части площади данного треугольника.

36 Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции делит каждую из них на отрезки, отношение которых равно отношению прилежащих оснований.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Определение высоты одиноко стоящего дерева.

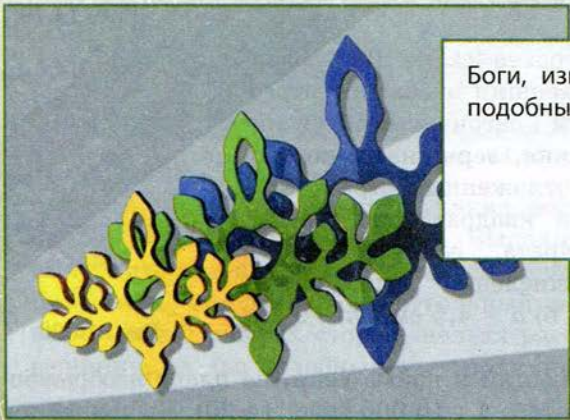
ВАША РОЛЬ. Путешественник.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. В солнечный день вы оказались рядом с одиноко стоящей пальмой, высоту которой вам необходимо определить. В вашем распоряжении имеется шест и рулетка.

ЗАДАНИЕ. Определите высоту пальмы.

Глава 15

ГОМОТЕТИЯ



> Боги, известно, всегда подобное сводят с подобным.
>
> *Гомер (древнегреческий поэт, предположительно VIII в. до н.э.)*

Открываем новые знания

§ 15.1 ПОНЯТИЕ ГОМОТЕТИИ

Как можно построить фигуру, подобную данной? Например, нам нужно построить треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия $k = 2$.

1. Пусть нам дан треугольник ABC, выберем некоторую точку O, лежащую вне данного треугольника (рис. 15.1а).

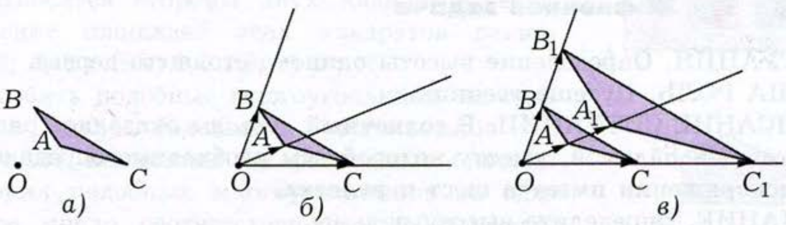


Рис. 15.1

2. Построим лучи OB, OA и OC, получим векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ (рис. 15.1б).

3. Построим векторы $\overline{OA_1} = 2\ \overline{OA}$, $\overline{OB_1} = 2\ \overline{OB}$, $\overline{OC_1} = 2\ \overline{OC}$ (рис. 15.1в).

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будут подобными (это мы докажем позднее).

В результате этих построений мы выполнили геометрическое преобразование, которое называют *гомотетией*. При этом мы использовали операцию умножения вектора на число.

Всё сказанное приводит нас к следующему определению гомотетии.

Определение 67. Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется геометрическое преобразование, при котором каждая точка X переходит в точку X_1, такую, что $\overline{OX_1} = k\ \overline{OX}$.

Если при гомотетии с центром O и коэффициентом k фигура Φ_1 переходит в фигуру Φ_2, то при гомотетии с центром O и коэффициентом $\dfrac{1}{k}$ фигура Φ_2 переходит в фигуру Φ_1. Такие фигуры Φ_1 и Φ_2 называют *гомотетичными*.

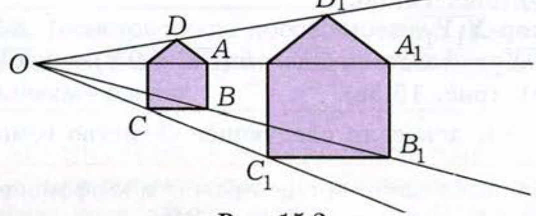


Рис. 15.2

Если $k = 1$, то при гомотетии фигура перейдёт в себя.

Если $k > 0$, то соответственные точки гомотетичных фигур располагаются по одну сторону от центра гомотетии. На рис. 15.2 $k = 2$, $\overline{OX_1} = 2 \cdot \overline{OX}$.

Если $k < 0$, то соответственные точки гомотетичных фигур располагаются по разные стороны от центра гомотетии. На рис. 15.3 $k = -2$, $\overline{OX_1} = -2 \cdot \overline{OX}$.

Если $k = -1$, то при гомотетии фигура перейдёт в фигуру, симметричную данной фигуре относительно центра O (рис. 15.4).

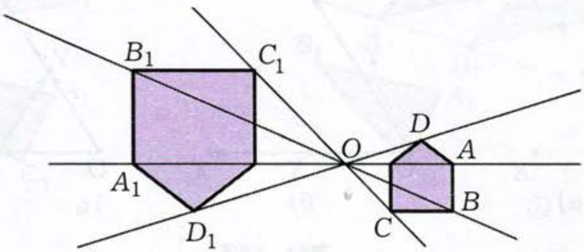


Рис. 15.3

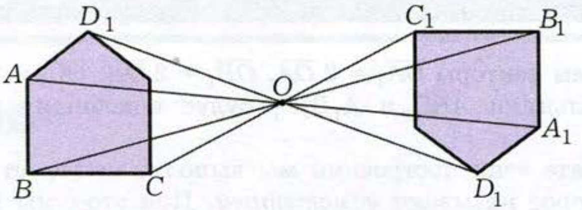


Рис. 15.4

§ 15.2 СВОЙСТВА ГОМОТЕТИИ

Рассмотрим *основные свойства гомотетии.*

1. Пусть нам дана гомотетия с центром O и коэффициентом k.

2. Возьмём две произвольные точки X и Y. Посмотрим, в какие точки перейдут они при гомотетии с центром O и коэффициентом k (рис. 15.5а).

3. $\overline{OX_1} = k\,\overline{OX}$, $\overline{OY_1} = k\,\overline{OY}$ (1, 2, определение гомотетии) (рис. 15.5б).

4. Найдём разность векторов $\overline{OY}$ и $\overline{OX}$. $\overline{XY} = \overline{OY} - \overline{OX}$ (4, определение разности векторов) (рис. 15.5в).

5. Найдём вектор $\overline{X_1Y_1}$.
$\overline{X_1Y_1} = \overline{OY_1} - \overline{OX_1} = k\,\overline{OY} - k\,\overline{OX} = k\,(\overline{OY} - \overline{OX}) = k\,\overline{XY}$ (3, 4, свойство разности векторов) (рис. 15.5в).

Таким образом, мы доказали следующее свойство гомотетии:

Теорема 69. Если при гомотетии с центром O и коэффициентом k точки X и Y переходят в точки X_1 и Y_1, то $\overline{X_1Y_1} = k\,\overline{XY}$.

Из этой теоремы можно получить следствия — свойства гомотетии:
При гомотетии с центром O и коэффициентом k:

! 1) расстояния между соответствующими точками умножаются на $|k|$;

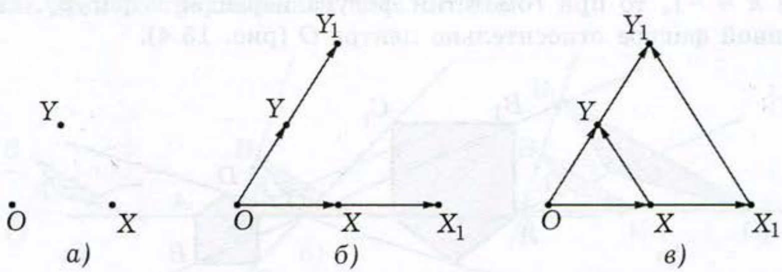


Рис. 15.5

2) любой треугольник ABC переходит в подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$;

3) отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, параллельный AB и такой, что $A_1B_1 = |k| \cdot AB$.

§ 15.3* ГОМОТЕТИИ И ИЗОМЕТРИИ

В различных разделах учебника мы много говорили об изометриях, которые являются геометрическими преобразованиями, сохраняющими расстояния между парами соответствующих точек.

В предыдущем параграфе мы ввели понятие гомотетии с коэффициентом k, которая при $|k| \neq 1$ не сохраняет расстояний между соответствующими точками, а изменяет эти расстояния в одно и то же число раз.

В геометрии есть понятие более общее, чем гомотетия, — *преобразование подобия*.

Определение 68. Геометрическое преобразование, при котором расстояние между соответствующими точками изменяется в одно и то же число раз, называется преобразованием подобия.

Если сравнить это определение со свойствами гомотетии, можно сделать вывод о том, что гомотетия является преобразованием подобия.

Подобные треугольники не всегда гомотетичны. На рис. 15.6а изображены два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, которые подобны друг другу, но они очевидно не гомотетичны (например, потому, что $A_1C_1 \nparallel AC$).

Как с помощью различных геометрических преобразований можно перевести треугольник ABC в подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$?

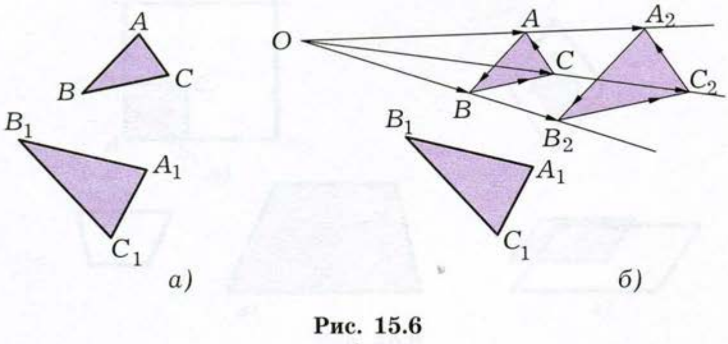


Рис. 15.6

1. Пусть даны два подобных треугольника $A_1B_1C_1$ и ABC с коэффициентом подобия k (дано) (рис. 15.6а).

2. Выполним гомотетию с центром O и коэффициентом подобия k и построим $\Delta A_2B_2C_2$, гомотетичный ΔABC (построение) (рис. 15.6б).

3. $A_1B_1 = k\,AB$, $B_1C_1 = k\,BC$, $C_1A_1 = k\,CA$, где k — коэффициент подобия данных треугольников (1, определение подобных треугольников).

4. $A_2B_2 = kAB$, $B_2C_2 = k\,BC$, $C_2A_2 = k\,CA$ (1, свойство гомотетии).

5. $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ (3, 4, Т.4 — признак равенства треугольников по трём сторонам).

Обобщим всё то, что мы имеем:

а) $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (дано).

б) $\Delta A_2B_2C_2$ гомотетичен ΔABC (построение).

в) $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ (свойство гомотетии).

г) $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ (доказано).

Из утверждений а) — г) следует:

! Если есть два подобных треугольника, то существует третий треугольник, который равен первому и гомотетичен второму.

В параграфе 6.2 мы говорили о том, что при изометрии фигура переходит в равную ей фигуру. Можно доказать, что равные фигуры могут быть совмещены друг с другом при помощи изометрии или последовательного выполнения нескольких изометрий.

? Попробуйте самостоятельно найти такие изометрии, с помощью которых $\Delta A_1B_1C_1$ можно перевести в $\Delta A_2B_2C_2$ (рис. 15.6б).

Развиваем умения

К § 15.1—15.3

Н ⇓

1 На рис. 15.7 куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перешёл в куб $A'B'C'D'A'_1B_1C'_1D'_1$ при гомотетии с центром B_1 и коэффициентом гомотетии k.

а) В какие точки перешли при этой гомотетии точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1?

б) Отношение каких отрезков на этом рисунке равно k?

в) В какие прямые перешли при этой гомотетии прямые AB, AC, AA_1, BB_1?

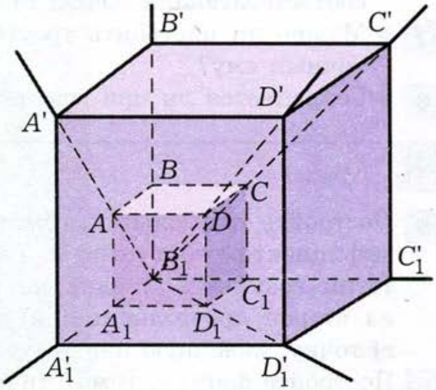


Рис. 15.7

Н ⇑

2 В какую фигуру перейдёт при гомотетии: а) угол; б) параллелограмм; в) трапеция?

3 Сколько существует центров гомотетии, которая переводит один круг в другой (оба круга лежат в одной плоскости)?

4 На каждом из рис. 15.8а—15.8г изображена пара фигур.

а) Гомотетичны ли изображённые фигуры?

б) Где находится центр гомотетии в каждом случае, когда фигуры гомотетичны?

в) Как определить коэффициент гомотетии в каждом случае, когда фигуры гомотетичны?

г) Имеется ли у каких-нибудь пар гомотетичных фигур на рис. 15.8 более одного центра гомотетии?

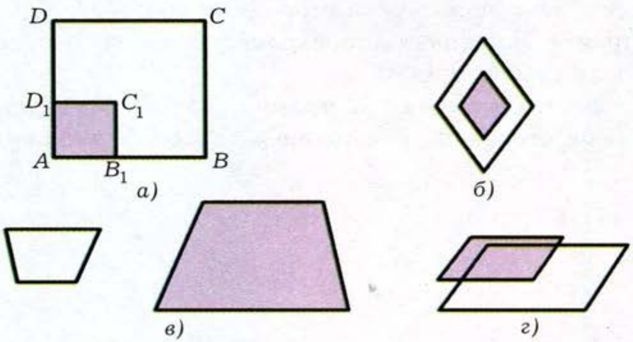


Рис. 15.8

5 Как можно задать гомотетию?

6 Можно ли найти центр гомотетии, если известны: а) только одна пара соответствующих точек; б) две пары соответствующих точек?

7 Можно ли построить треугольник, подобный данному, но не гомотетичный ему?

8 Сохраняется ли при гомотетии параллельность прямых?

Н

9 Постройте треугольник, гомотетичный данному треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии k, равным: 2; -1; -2. В качестве центра гомотетии возьмите: а) одну из вершин треугольника; б) середину одной из сторон треугольника; в) точку пересечения медиан треугольника; г) точку, лежащую вне треугольника.

10 Постройте фигуру, гомотетичную квадрату, приняв за центр гомотетии центр квадрата. Может ли при различных центрах гомотетии получиться один и тот же квадрат?

П

11 Даны два параллельных отрезка AB и A_1B_1. При каком условии существует гомотетия, переводящая точку A в точку A_1 и точку B в точку B_1?

12 Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC. Докажите, что медианы, биссектрисы и высоты треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетичны соответствующим медианам, биссектрисам и высотам треугольника ABC.

М

13 Даны два квадрата. Постройте третий квадрат, равный одному из данных квадратов и гомотетичный другому.

14 Даны угол и лежащая внутри этого угла точка M.

а) Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся сторон угла.

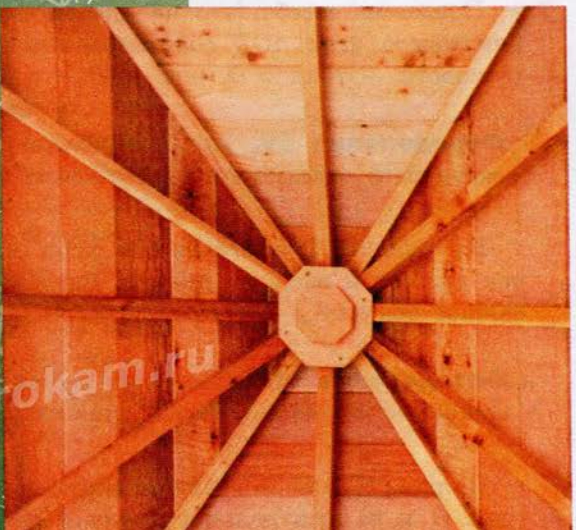
б) Проведите через точку M прямую так, чтобы отрезок её с концами A и B на сторонах угла делился точкой M в данном отношении.

РАЗДЕЛ 6

СИНУС И КОСИНУС. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

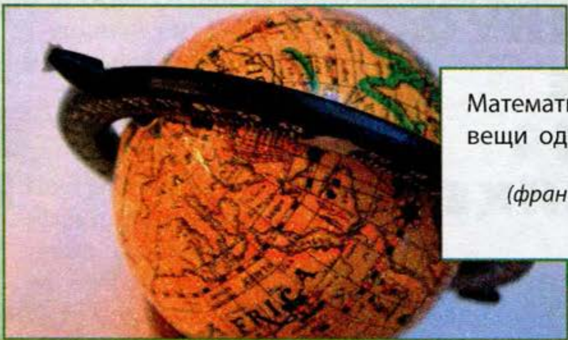
Высшее назначение математики состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Норберт Винер
(американский учёный, 1894–1964)



Глава 16

СИНУС И КОСИНУС



Математика есть способ назвать разные вещи одним именем.

Жюль Анри Пуанкаре (французский математик, физик и философ, 1854—1912)

Открываем новые знания

§ 16.1 ЦЕНТРАЛЬНЫЕ УГЛЫ И ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Представьте себе, что на плоскости вершина некоторого угла AOB совпадает с центром окружности — точкой O (рис. 16.1).

Определение 69. Угол с вершиной в центре окружности называется её центральным углом.

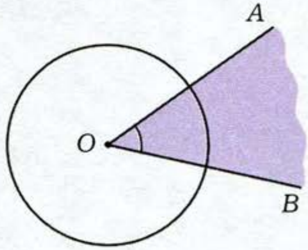


Рис. 16.1

На рис. 16.1 центральный угол AOB отмечен дужкой и выделен цветом. Введём ещё одно важное понятие — *дуга окружности*.

Определение 70. Пересечение окружности и её центрального угла называется дугой окружности.

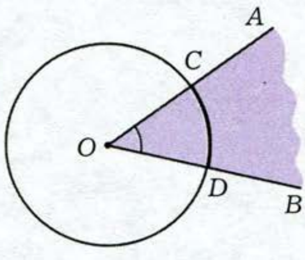


Рис. 16.2

На рис. 16.2 пересечением окружности с центром O и её центрального угла AOB является дуга CD. Для обозначения дуги используется знак «$\smile$». Пишут: «$\smile CD$».

Центральные углы измеряются так же, как обычные углы. А как измеряются дуги окружности? Для измерения дуг окружности вводятся, например, их угловые величины.

Определение 71. Угловой величиной дуги окружности называется величина соответствующего центрального угла.

Угловую величину дуги обозначают тем же знаком, что и саму дугу, например $\smile CD=40°$. Согласно определению 71, можно записать: $\smile AB=\angle AOB$ (рис. 16.3).

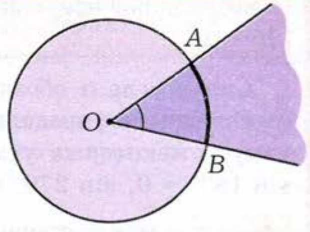


Рис. 16.3

Определение 72. Пересечение круга и его центрального угла называется сектором круга.

На рис. 16.3 пересечением круга с центром в точке O и центрального угла AOB является сектор AOB.

§ 16.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА И КОСИНУСА

Введём на плоскости прямоугольную систему координат xOy[1] и рассмотрим окр. $(O, 1)$ (рис. 16.4). В дальнейшем эту окружность будем называть *единичной окружностью*.

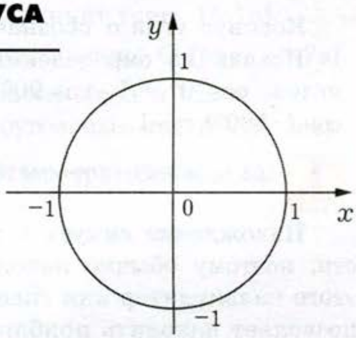


Рис. 16.4

Выполним поворот луча Ox вокруг точки O на угол α, считая, как принято в математике, что повороты на положительный угол выполняются против часовой стрелки, а повороты на отрицательный угол — по часовой стрелке. Точку пересечения луча, полученного после выполнения поворота, с единичной окружностью обозначим P_α (рис. 16.5). На рис. 16.5 изображены также точки $P_{0°}$, $P_{90°}$, $P_{-90°}$, $P_{130°}$, $P_{180°}$. Заметим, что точки, полученные после поворота луча Ox на различные углы, могут совпадать. Скажем, точка $P_{-180°}$ совпадает с точкой $P_{180°}$, точка $P_{270°}$ совпадает с точкой $P_{-90°}$.

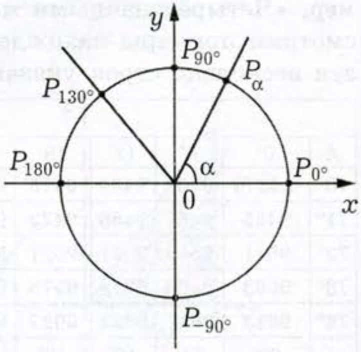


Рис. 16.5

Из рис. 16.5 видно, что точка $P_{0°}$ имеет координаты $(1, 0)$, точка $P_{90°}$ имеет координаты $(0, 1)$.

1 С прямоугольной системой координат вы уже знакомы из курса алгебры.

Точка P_α имеет две координаты: абсциссу x_α и ординату y_α (рис. 16.6). Значения этих координат имеют в математике названия: *косинус угла* α и *синус угла* α.

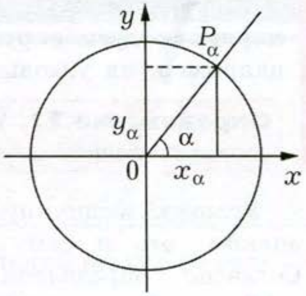


Рис. 16.6

Определение 73. Ордината точки P_α, принадлежащей единичной окружности, называется синусом угла α.

Синус угла α обозначается $\sin \alpha$.

Исходя из определения синуса, можно найти синусы некоторых углов: $\sin 0° = 0$, $\sin 90° = 1$, $\sin 180° = 0$, $\sin 270° = -1$, $\sin(-90°) = -1$, $\sin(-180°) = 0$.

! $\sin \alpha$ может принимать значения только от –1 до 1 (рис. 16.6).

Определение 74. Абсцисса точки P_α, принадлежащей единичной окружности, называется косинусом угла α.

Косинус угла α обозначается $\cos \alpha$.

Исходя из определения косинуса, можно найти косинусы некоторых углов: $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\cos(-90°) = 0$, $\cos(-180°) = -1$.

! $\cos \alpha$ может принимать значения только от –1 до 1 (рис. 16.6).

Нахождение синуса и косинуса для большинства углов весьма непросто, поэтому обычно находят их приближённые значения, используя для этого калькулятор или специальные математические таблицы. Калькулятор позволяет находить приближённые значения синуса и косинуса любого угла α, а для угла α в пределах $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$ можно воспользоваться, например, «Четырёхзначными математическими таблицами» В.М. Брадиса. Рассмотрим примеры нахождения значений синуса и косинуса углов, используя несколько строк указанных таблиц.

Синусы														
A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
70°	0,9374	9403	9409	9415	9521	9426	9432	9438	9444	9449	0,9455	19°	1	2	3
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18°	1	2	3
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17°	1	2	3
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16°	1	2	3
74°	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15°	1	2	3
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	*A*	1′	2′	3′
Косинусы															

Например, нужно найти значение $\sin 70°36'$. Находим число градусов в крайнем левом столбце таблицы, число минут — в верхней части таблицы. На пересечении соответствующих строки и столбца находим искомое число: $\sin 70°36' = 0{,}9432$. Это приближённое значение синуса с точностью до четвёртого знака после запятой.

Найдем $\cos 16°12'$. Число градусов ищем в правой стороне таблицы (в столбце A), число минут — в нижней части таблицы. На пересечении соответствующих строки и столбца находим искомое число: $\cos 16°12' = 0{,}9603$.

По этим же таблицам можно решать задачи, обратные рассмотренным: по данным значениям синуса и косинуса неизвестного острого угла находить приближённо этот угол, т.е. его величину.

§ 16.3 СИНУС И КОСИНУС ОСТРЫХ УГЛОВ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB, $\angle O = \alpha$ (рис. 16.7а).
2. Поместим треугольник AOB в систему координат (рис. 16.7б).
3. Проведём единичную окружность с центром в точке O (рис. 16.7в).
4. Координатами точки A_1 (рис. 16.7в) являются $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
5. $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$ (4, признак подобия прямоугольных треугольников).
6. $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BO}{B_1O_1} = \dfrac{AO}{A_1O_1}$ (5, определение подобных треугольников).
7. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{\sin\alpha} = \dfrac{AO}{1}, \text{ т.е. } \dfrac{AB}{\sin\alpha} = AO \\[2ex] \dfrac{BO}{\cos\alpha} = \dfrac{AO}{1}, \text{ т.е. } \dfrac{BO}{\cos\alpha} = AO \end{array}\right\} (4,\ 6).$$
8. $\sin\alpha = \dfrac{AB}{AO}$ (7).

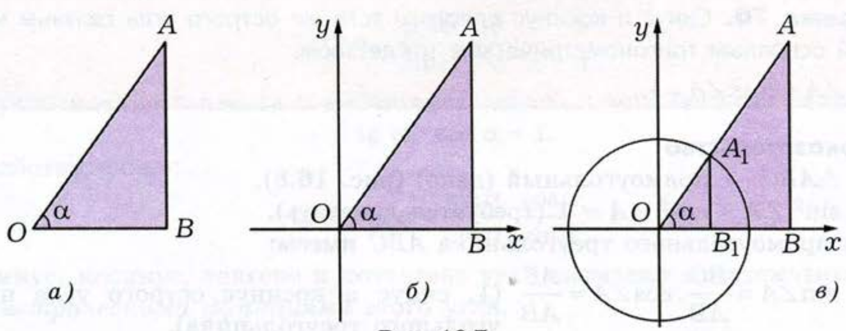


Рис. 16.7

9. $\cos\alpha = \dfrac{BO}{AO}$ (7).

Мы получили формулы для нахождения синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника. Их можно сформулировать так:

! Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.

! Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 16.8). Вышесказанное можно записать следующим образом:

1. $\sin \angle A = \dfrac{a}{c}$.
2. $\cos \angle A = \dfrac{b}{c}$.

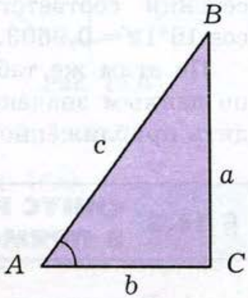


Рис. 16.8

Отсюда получаем:

! Катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего к этому катету угла.

! Катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего к этому катету угла.

! Гипотенуза прямоугольного треугольника равна катету, делённому на синус угла, противолежащего к этому катету.

! Гипотенуза прямоугольного треугольника равна катету, делённому на косинус угла, прилежащего к этому катету.

Если использовать формулы нахождения синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника, можно получить *основное тригонометрическое тождество*:

Теорема 70. Синус и косинус одного и того же острого угла связаны между собой основным тригонометрическим тождеством:
$\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$.

Доказательство

1. $\triangle ABC$ — прямоугольный (дано) (рис. 16.8).
2. $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$ (требуется доказать).

Из прямоугольного треугольника ABC имеем:

3. $\sin\angle A = \dfrac{BC}{AB}, \cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$ (1, синус и косинус острого угла прямоугольного треугольника).

4. $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 = \dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$ (1, 3).

5. $BC^2 + AC^2 = AB^2$ (1, теорема Пифагора).

6. $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$ (4, 5). ■

Можно доказать, что $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ для любого угла α.

§ 16.4 ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС

Введём ещё два важных математических понятия — *тангенс* и *котангенс* угла.

Определение 75. Тангенсом угла α называется отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$.

Тангенс угла α обозначается $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

! Тангенс острого угла α прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему (рис. 16.9):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}.$$

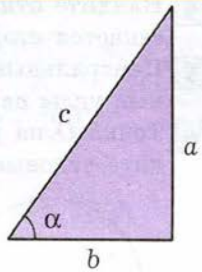


Рис. 16.9

Определение 76. Котангенсом угла α называется отношение $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$.

Котангенс угла α обозначается $\operatorname{ctg} \alpha$.

! Котангенс острого угла α прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к противолежащему (рис. 16.9):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}.$$

Произведение тангенса и котангенса одного и того же угла равно 1:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Действительно:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла называют в математике *тригонометрическими функциями* этого угла.

Развиваем умения

К § 16.1

Н ⇓

1 ● На окружности с центром O заданы точки A и B (рис. 16.10). Сколько дуг, хорд и центральных углов задают точки A и B?

2 Найдите угловую величину: а) полуокружности; б) четверти окружности.

Н ⇑

3 ● Сколько дуг, хорд и центральных углов задают: а) три точки окружности; б) четыре точки окружности?

Н

4 Найдите отношение угловых величин дуг, на которые окружность рассекается сторонами центрального угла в 60°.

5 Центральные углы AOC и DOB равны (рис. 16.11). Какие ещё центральные углы данной окружности равны?

6 Точка O на рис. 16.12 является центром окружности и $AB = OC$. Найдите угловые величины дуг AB, AC, ACB.

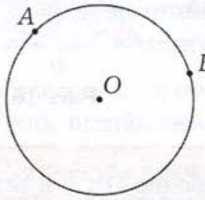


Рис. 16.10

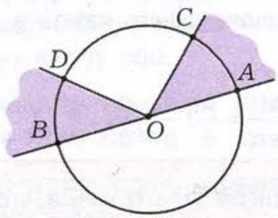


Рис. 16.11

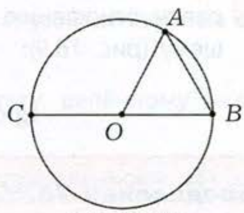


Рис. 16.12

М

7 Хорду AB разделили на три равные части точками C и D (рис. 16.13). Через эти точки провели перпендикуляры к хорде, разделившие дугу AB на три части. Проверьте, равны ли эти части. Получатся ли равные дуги, если хорду разделить на равные части и через точки деления провести радиусы?

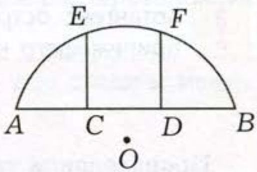


Рис. 16.13

К § 16.2–16.3

Н ⇓

8 Какие координаты имеют точки единичной окружности:
а) $P_{90°}$; б) $P_{180°}$; в) $P_{-90°}$; г) $P_{-180°}$; д) $P_{360°}$; е) $P_{-270°}$?

Н ⇑

9 Может ли абсцисса или ордината точки единичной окружности иметь значение 1,5?

10 Может ли синус (косинус) угла иметь значение: а) $\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{2}$?

Н

11 Чему равны синус и косинус следующих углов: 0°, 90°, –90°, 180°, –180°, 270°, –270°?

12 Постройте угол α, $-180° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, для которого:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = \frac{3}{2}$; в) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$;

г) $\sin\alpha = -1$; д) $\sin\alpha = -\frac{5}{6}$; е) $\sin\alpha = -2$.

13 Постройте угол α, $-180° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, для которого:

а) $\cos\alpha = -1$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{2}$; в) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$;

г) $\cos\alpha = 0$; д) $\cos\alpha = \frac{11}{12}$; е) $\cos\alpha = -2$.

14 Найдите синус и косинус углов 30°, 45°, 60°, –30°, –45°, –60°.

15 Вычислите значение $\cos\alpha$, если дано значение $\sin\alpha$:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$; б) $\sin\alpha = 0{,}96$, $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

в) $\sin\alpha = 0{,}8$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$; г) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

16 Вычислите значение $\sin\alpha$, если дано значение $\cos\alpha$:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$; б) $\cos\alpha = -0{,}5$, $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

в) $\cos\alpha = 0{,}6$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$; г) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

П

17 Докажите, что $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ и $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

К § 16.4

Н ⇓

18 Чему равен тангенс угла 0°?

19 Чему равен котангенс угла 90°?

Н ⇑

20 Приведите примеры углов, тангенс которых не существует.

21 Приведите примеры углов, котангенс которых не существует.

Н

22 Найдите значения тангенса и котангенса углов: а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $-30°$; д) $-45°$; е) $-60°$.

23 Докажите, что $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

24 Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника взаимно обратны, т.е. их произведение равно 1.

25 Имеется прямоугольный $\triangle ABC$. Найдите $\operatorname{tg} A$, если:

а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\cos A = 0{,}6$; в) $\sin A = \frac{3}{5}$; г) $\sin A = 0{,}8$.

26 Вычислите значения тригонометрических функций углов A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC.

27 Постройте прямоугольный треугольник ABC, измерьте его стороны и вычислите значения: а) $\sin A$; б) $\cos A$; в) $\operatorname{tg} A$. Изменятся ли найденные значения тригонометрических функций, если все стороны треугольника ABC: а) увеличить в n раз; б) уменьшить в k раз? Обоснуйте свой ответ.

28 Стороны прямоугольника равны 7 см и 12 см. Вычислите тангенсы углов, образованных диагональю прямоугольника и его сторонами.

29 Из точки A, находящейся на расстоянии 3 см от прямой MN, проведена к этой прямой наклонная $AB = 5$ см. Вычислите тангенс и котангенс образовавшегося острого угла B.

30 Из точки A, находящейся на расстоянии 4,5 см от прямой MN, проведена к этой прямой наклонная AB. Вычислите $\operatorname{tg} B$, если известно, что проекция наклонной на прямую MN равна 3,6 см.

31 Постройте при помощи транспортира углы в $20°$, $40°$, $50°$, $80°$ и найдите синус, косинус и тангенс каждого из построенных углов, выполнив необходимые измерения.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Построение маршрута, удовлетворяющего заданным условиям.

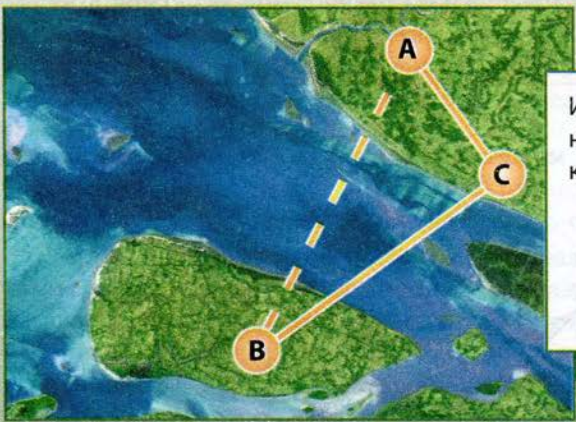
ВАША РОЛЬ. Исследователь неизвестных планет.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Ваш планетоход находится на ровной поверхности планеты внутри прямоугольной полосы шириной 10 км и длиной более 100 км, излучение которой не позволяет обнаружить вас со спутника. Как только вы окажетесь за пределами полосы, будете мгновенно обнаружены и получите сообщение об этом. Вы не знаете ни вашего положения внутри полосы, ни направления её сторон. Заряда батареи планетохода хватит, чтобы проехать 23,1 км.

ЗАДАНИЕ. Как вам нужно двигаться, чтобы вас гарантированно обнаружили со спутника?

Глава 17

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Идеи всплывают всегда, когда на них стоит печать математической красоты.

Жюль Анри Пуанкаре (французский математик, физик и философ, 1854—1912)

Открываем новые знания

§ 17.1 РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Вычисление элементов треугольника по его известным элементам называется *решением треугольника*. Решим одну из таких задач.

Задача

В прямоугольном треугольнике ABC дано: a, b (рис. 17.1) Найти: $\angle A$, $\angle B$, c.

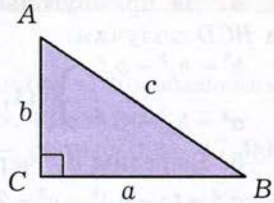


Рис. 17.1

Решение

1. $\triangle ABC$ — прямоугольный.
2. a и b — катеты $\triangle ABC$.

} (дано) (рис. 17.1)

3. Найти $\angle A$, $\angle B$ и c.

Воспользуемся формулой, которая связывает катеты прямоугольного треугольника и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.

4. $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{a}{b}$ (1, 2, определение тангенса угла).

Зная числовые значения a и b, величину угла A можно найти из таблиц.

5. $\angle B = 90^\circ - \angle A$ (4, теорема о сумме углов треугольника).

6. $c = \dfrac{a}{\sin \angle A}$ (1, 5, свойства синуса угла). ■

Докажем *теорему косинусов:*

Теорема 71. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство

Угол A треугольника ABC может быть острым, тупым или прямым (рис. 17.2).

Рассмотрим доказательство для случая, когда угол A острый (рис. 17.2а).

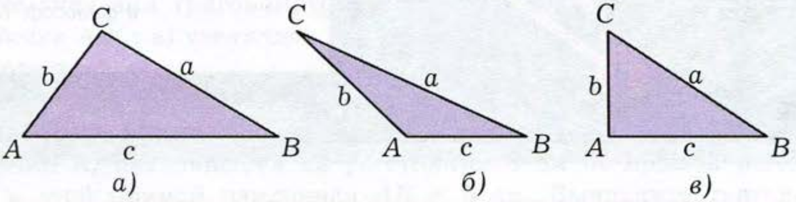


Рис. 17.2

1. $\triangle ABC$, $\angle A$ — острый (дано) (рис. 17.2а).

2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$ (требуется доказать).

Дальнейшие рассуждения проведём для рис. 17.3а. Рассуждения для рис. 17.3б проведите самостоятельно.

3. Проведём $CD \perp AB$ (построение) (рис. 17.3).

4. Из прямоугольных треугольников ACD и BCD получим:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= {h_c}^2 + {b_c}^2 \\ a^2 &= {h_c}^2 + {a_c}^2 \end{aligned}\right\} \text{(1, 3, теорема Пифагора).}$$

5. Выразим ${a_c}^2$ через b_c и c:

${a_c}^2 = (c - b_c)^2 = c^2 - 2cb_c + {b_c}^2$ (1, 3).

6. Подставив выражения ${h_c}^2$ из равенства 1 п. 4 и ${a_c}^2$ из равенства п. 5 во второе равенство, получим:

$a^2 = b^2 - {b_c}^2 + c^2 - 2cb_c + {b_c}^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c$ (4, 5).

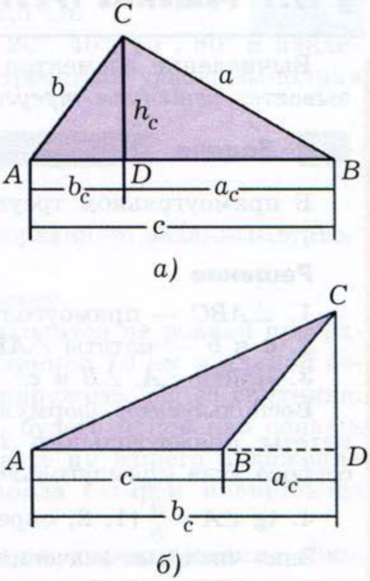


Рис. 17.3

Вспомним определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.

7. В $\triangle ACD$: $\cos\angle A = \dfrac{b_c}{b}$, или $b_c = b\cos\angle A$ (4, свойство косинуса угла прямоугольного треугольника).

8(2). a2 = b2 + c2 − 2bc cos QA (6, 7). ■

Проведите самостоятельно доказательство теоремы косинусов для случаев, когда угол A тупой или прямой (рис. 17.2б и 17.2в).

Теорема косинусов может быть записана и для двух других сторон треугольника ABC:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B;$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\angle C.$$

Формула a2 = b2 + c2 − 2bc cos QA позволяет вычислить длину одной из сторон треугольника по данным длинам двух других сторон и величине угла, лежащего против неизвестной стороны.

Теорема косинусов позволяет также по данным длинам сторон треугольника вычислить величины его углов:

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Аналогично можно получить формулы для $\cos\angle B$ и $\cos\angle C$.

§ 17.2 ЕЩЁ ОДНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Выведем ещё одну формулу для нахождения площади треугольника, которая использует понятие синуса угла.

Теорема 72. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Доказательство

Так как в искомую формулу входит угол треугольника α, то возможны различные случаи: угол α может быть острым, тупым, прямым.

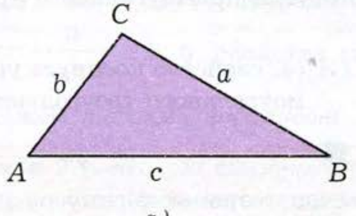
Проведём доказательство для случая, когда угол α — острый (рис. 17.4а).

1. $\triangle ABC$, $\angle A$ — острый (дано) (рис. 17.4а).

2. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ (требуется доказать).

3. Построим высоту CD треугольника ABC (построение) (рис. 17.4б).

4. Выразим h_c через сторону b и синус угла α: $h_c = b\sin\alpha$ (1, 3, свойство синуса угла прямоугольного треугольника).



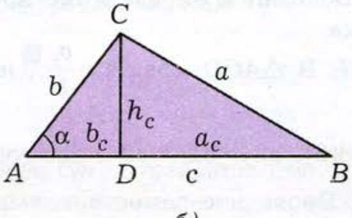


Рис. 17.4

5. Подставляя в формулу $S = \frac{1}{2}ch_c$ выражение h_c, получим: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (формула нахождения площади треугольника). ■

Проверьте самостоятельно справедливость этой формулы для других видов угла A.

§ 17.3 ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Есть ещё одна теорема, которая позволяет находить элементы треугольника, — *теорема синусов*.

Теорема 73. Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

Доказательство

1. Треугольник ABC со сторонами a, b, c и углами α, β, γ (дано) (рис. 17.5).

2. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (требуется доказать).

Воспользуемся теоремой 72.

$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

3. $bc\sin\alpha = ac\sin\beta$ и $ac\sin\beta = ab\sin\gamma$ (1, Т.72).

4. $b\sin\alpha = a\sin\beta$ и $c\sin\beta = b\sin\gamma$ (3).

5. Синус каждого из углов α, β, γ не равен нулю, тогда

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ и $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (4).

6(2). $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (5). ■

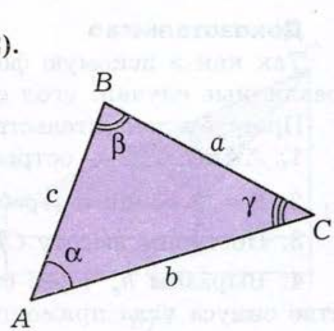


Рис. 17.5

Теорема синусов позволяет по двум данным сторонам и углу, лежащему против одной из них (или по стороне и двум углам), вычислять остальные элементы треугольника.

Рассмотрим задачу, при решении которой используется теорема синусов.

Задача

Мы движемся в вагоне поезда из точки A в точку C. Находясь в точке A, мы видим объект B под углом α к направлению движения вагона (рис. 17.6).

Угол α — это угол между направлением движения поезда и направлением на объект B, в навигации этот угол называется *курсовым углом*. Оказавшись через некоторое время в точке C, мы видим объект B уже под углом β.

Нужно найти расстояние от точки A до объекта B.

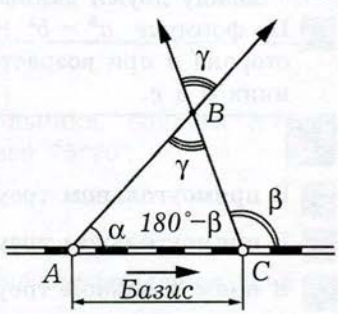


Рис. 17.6

Решение

1. В результате наблюдений мы получили треугольник ABC с углом A, равным α, и внешним углом β (рис. 17.6) (дано).

2. $\angle BCA$ будет равен $180° - \beta$ (1, свойство смежных углов).

3. Третий угол: $\angle B = 180° - \alpha - (180° - \beta) = 180° - \alpha - 180° + \beta = \beta - \alpha$ (1, 2, теорема о сумме углов треугольника).

Угол $\gamma = \angle ABC = \beta - \alpha$ называют *параллаксом*. Как с помощью параллакса измерить расстояние от точки A до точки B?

Отрезок AC называют *базисом*. Измерим его.

4. Расстояние от точки A до точки B можно найти по теореме синусов:

$\dfrac{AC}{\sin\gamma} = \dfrac{AB}{\sin(180° - \beta)}$, откуда $AB = \dfrac{AC\sin(180° - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$. ■

Развиваем умения

К § 17.1

Н ⇑

1 Будет ли верна теорема косинусов в случае, если угол, заключённый между двумя данными сторонами, прямой?

2 По формуле $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$ исследуйте, как будет изменяться сторона a при возрастании угла α от $0°$ до $180°$ при постоянных значениях b и c.

Н

3 В прямоугольном треугольнике ABC дано: a, c. Найдите: $\angle A$, $\angle B$, b.

4 В прямоугольном треугольнике ABC дано: a, $\angle A$. Найдите: $\angle B$, b, c.

5 В прямоугольном треугольнике ABC дано: a, $\angle B$. Найдите: $\angle A$, b, c.

6 В прямоугольном треугольнике ABC дано: c, $\angle A$. Найдите: $\angle B$, a, b.

7 Вычислите неизвестную сторону треугольника ABC по следующим данным:

а) $a = 7$, $b = 10$, $\angle C = 56°29'$;

б) $a = 2$, $c = 3$, $\angle B = 123°17'$;

в) $b = 0{,}4$, $c = 1{,}2$, $\angle A = 23°28'$.

8 Вычислите длины диагоналей параллелограмма, если длины его сторон равны 12 дм и 15 дм, а один из углов равен 52°.

9 Вычислите наибольший из углов треугольника ABC, если даны три его стороны:

а) $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$; б) $a = 40$, $b = 13$, $c = 37$.

П

10 Две силы $P = 100$ Н и $Q = 200$ Н приложены к материальной точке под углом $\alpha = 50°$ друг к другу. Определите величину равнодействующей силы R и углы, которые она составляет с силами P и Q.

М

11 В параллелограмме $ABCD$ $\angle BAD = 60°$, $AB = a$, $BC = b$. Докажите, что $AC^2 \cdot BD^2 = a^4 + b^4$.

12 Три равных квадрата расположены так, как показано на рис. 17.7. Вычислите сумму величин углов CBD и CAD.

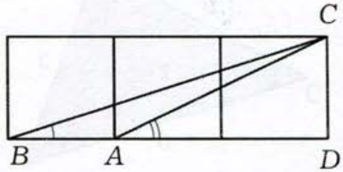


Рис. 17.7

К § 17.2

Н ⇑

13 Пользуясь формулой $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, исследуйте, как будет изменяться площадь треугольника ABC при возрастании γ от 0° до 180° (a и b постоянны). При каком значении γ площадь треугольника ABC будет наибольшей?

Н

14 Вычислите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 10 м, а угол при вершине равен 75°20′.

15 Вычислите площадь треугольника ABC, если:

а) $a = 125$ м, $b = 160$ м, $\gamma = 52°$;

б) $b = 20$ см, $c = 35$ см, $\alpha = 79°06'$.

16 Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению длин его смежных сторон на синус угла между ними.

П

17 Вычислите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 4 см, а угол между диагоналями равен 30°.

18 Вычислите площадь ромба:

а) по его стороне $a = 7{,}5$ см и острому углу $\alpha = 22°10'$;

б) по его диагонали $m = 4{,}5$ см и углу $\alpha = 150°$, лежащему против этой диагонали.

М

19 Даны два треугольника, α — угол одного из треугольников, β — угол другого треугольника, $\alpha + \beta = 180°$. Докажите, что площади этих треугольников относятся как произведения сторон, прилежащих к этим углам.

20 Один из углов прямоугольного треугольника равен 15°. Выразите площадь этого треугольника через его гипотенузу c.

К § 17.3

Н

21 Вычислите длины всех сторон и величины всех углов треугольника по следующим данным:

а) $a = 109$, $\angle B = 33°24'$, $\angle C = 66°59'$;

б) $c = 16$, $\angle A = 143°03'$, $\angle B = 22°37'$;

в) $a = 20$, $b = 13$, $\angle A = 67°23'$;

г) $a = 37$, $b = 59$, $\angle C = 23°20'$.

22 В треугольнике KFM $KM = 6$ см, $FK = 5$ см, $\angle M = 24°$. Найдите угол F, если известно, что этот угол острый.

23 Вычислите длины сторон AB и BC треугольника ABC, если:

а) $AC = 5$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$;

б) $AC = 1$ см, $\angle A = 100°$, $\angle C = 50°$.

П

24 Докажите теорему синусов для прямоугольного треугольника. Чему будет равно каждое из полученных отношений в случае прямоугольного треугольника?

25 Один из углов равнобедренного треугольника равен 120°. Найдите отношение сторон этого треугольника.

М

26 Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к ней углов.

27 Одна из диагоналей параллелограмма равна m. Углы параллелограмма делятся этой диагональю на части, величины которых α и β. Вычислите длины сторон параллелограмма.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Определение расстояния на местности до недоступной точки.

ВАША РОЛЬ. Геодезист.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Требуется определить расстояние на земной поверхности от точки A до точки B на другом берегу реки.

ЗАДАНИЕ. Чтобы найти расстояние от точки A до точки B на другом берегу реки, выбрали точку C на расстоянии 50 м от точки A (рис. 17.8). Измерили углы A и C: $\angle A = 65°$, $\angle C = 80°$. Найдите расстояние AB.

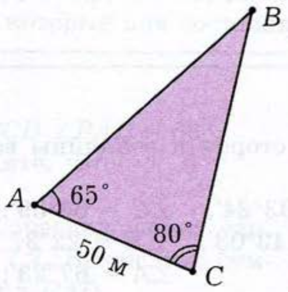


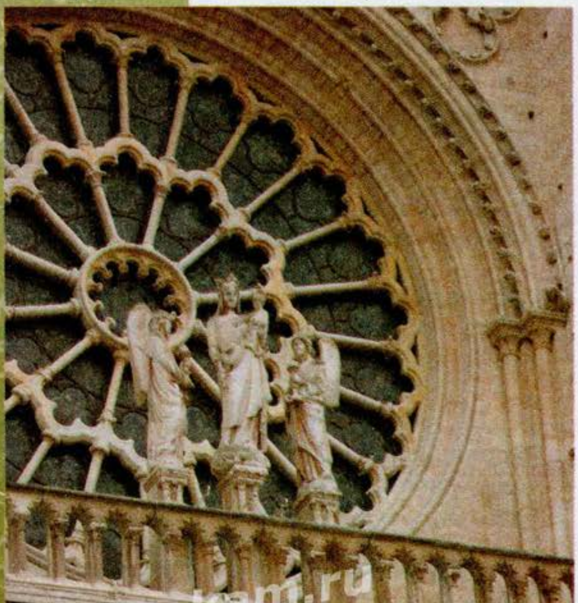
Рис. 17.8

РАЗДЕЛ 7

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Со времён греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство».

Николя Бурбаки (псевдоним, под которым группа французских математиков, начиная с 1939 года, на протяжении нескольких десятилетий предпринимала попытки изложить различные математические теории с позиций формального аксиоматического метода)



Глава 18

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В задачах по элементарной геометрии приходится пользоваться очень остроумными, подчас тонкими приёмами, и тот, кто в своей молодости вкусил их прелесть, никогда их не забудет.

Эмиль Борель
(французский математик, 1871–1956)

Открываем новые знания

§ 18.1 ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Введём ещё один вид углов, связанных с окружностью, — *вписанные углы*.

Определение 77. Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают её, называется вписанным углом.

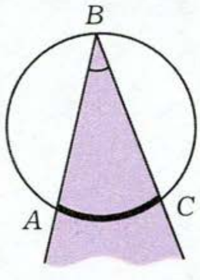


Рис. 18.1

На рис. 18.1 угол ABC — вписанный. Его вершина B принадлежит окружности, стороны BA и BC пересекают окружность. В этом случае говорят, что вписанный угол ABC *опирается* на дугу AC окружности.

Теорема 74. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

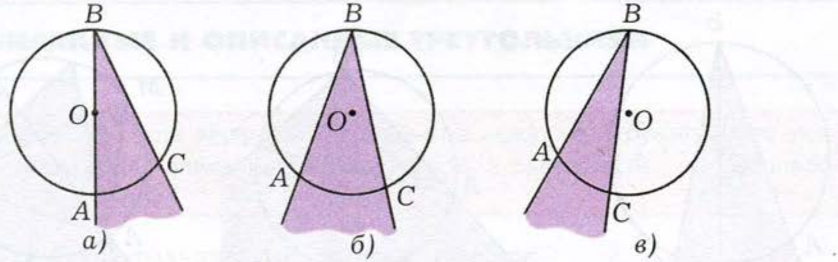


Рис. 18.2

Доказательство

Рассмотрим возможные случаи расположения центра окружности относительно вписанного в неё угла.

Случай 1. Центр окружности лежит на стороне вписанного угла (рис. 18.2а).

Случай 2. Центр окружности лежит внутри вписанного угла (рис. 18.2б).

Случай 3. Центр окружности лежит вне вписанного угла (рис. 18.2в).

Докажем теорему для первого случая.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \angle ABC \text{ — вписанный угол.} \\ 2.\ \text{Центр окружности } O \text{ лежит на стороне } AB \\ \quad \text{вписанного угла.} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(дано)} \\ \text{(рис. 18.2а)}\end{array}$$

3. $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$ (требуется доказать).

Мы умеем измерять центральные углы окружности (на рис. 18.2а они не изображены), построим такие углы.

4. Проведём отрезок OC и получим центральный угол $\angle AOC$ (построение) (рис. 18.3).

5. $\angle AOC$ является внешним углом треугольника BOC, а значит, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$ (1, 2, свойство внешнего угла треугольника — Т.38).

6. $\triangle OBC$ — равнобедренный, $\angle OBC = \angle OCB$ (1, 4, определение окружности, свойство углов при основании равнобедренного треугольника).

7. $\angle AOC = 2\angle OBC = 2\angle ABC$,
$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ (5, 6).

8. $\angle AOC = \smile AC$ (4, определение 71).

9(3). $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$ (7, 8). ■

Докажем теорему для второго случая (рис. 18.2б). Воспользуемся результатами доказательства для первого случая.

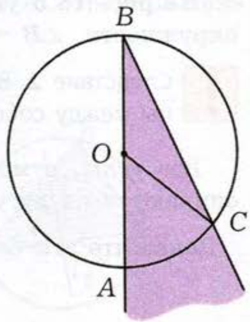


Рис. 18.3

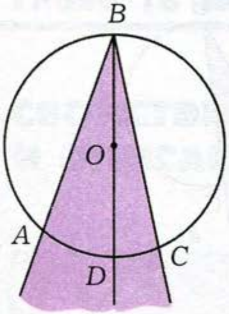


Рис. 18.4

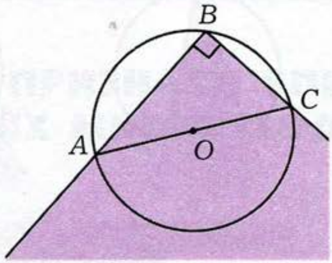


Рис. 18.5

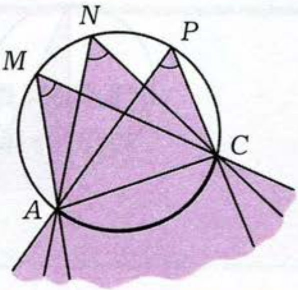


Рис. 18.6

10. Проведём луч BD, проходящий через центр окружности, и представим данный угол ABC в виде объединения двух углов — ABD и DBC (построение) (рис. 18.4).

11. $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ (10, свойство измерения углов).

12. Сторона BD углов ABD и DBC проходит через центр окружности (10).

13. $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$ (10, 11, 12, Т.74, случай 1).

14. $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC =$

$= \frac{1}{2} (\smile AD + \smile DC) = \frac{1}{2} \smile AC$ (11, 13). ■

Доказательство теоремы для третьего случая проведите самостоятельно.

Из теоремы 74 можно получить важные следствия.

! Следствие 1. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.

На рис. 18.5 угол B вписан в окружность и опирается на диаметр AC окружности. $\angle B = 90°$.

! Следствие 2. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

Все углы, отмеченные дужкой на рис. 18.6, вписаны в окружность и опираются на дугу AC, а значит, равны между собой.

Докажите эти следствия самостоятельно.

§ 18.2 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Определение 78. Если вершины треугольника лежат на окружности, то этот треугольник называется вписанным в окружность, а окружность — описанной около этого треугольника.

На рис. 18.7 треугольник ABC вписан в окружность с центром O.

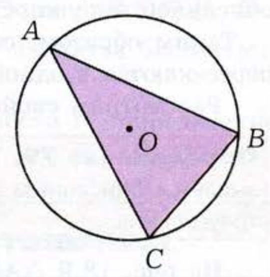


Рис. 18.7

Теорема 75. Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центром такой окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Доказательство

1. $\triangle ABC$ (дан) (рис. 18.8а).

2. Нам надо найти (построить) центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Центр окружности, описанной около треугольника, — точка, которая одинаково удалена от вершин треугольника. Нужно найти точку O, такую, что $OA = OB = OC = R$. Вспомним свойство серединного перпендикуляра к отрезку: его точки равноудалены от концов отрезка (Т.15). Это свойство серединного перпендикуляра подсказывает нам ход доказательства теоремы.

3. Построим серединный перпендикуляр l_1 к стороне AB треугольника ABC (построение) (рис. 18.8б).

4. Центр искомой окружности должен лежать на этом перпендикуляре (3, Т.15).

Точки этого серединного перпендикуляра одинаково удалены только от двух вершин треугольника ABC: A и B.

5. Построим серединный перпендикуляр l_2 к стороне AC треугольника ABC (построение) (рис. 18.8в).

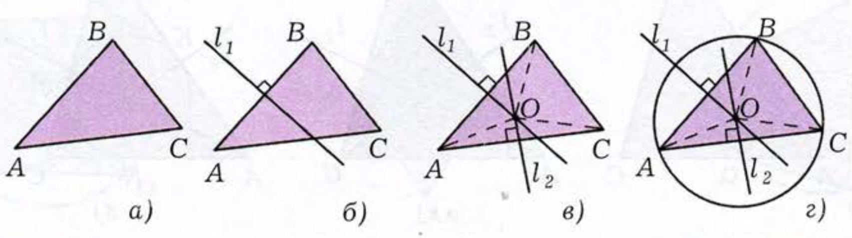


Рис. 18.8

6. Точки прямой l_2 одинаково удалены от точек A и C (1, 5, Т.15).

7. Серединные перпендикуляры l_1 и l_2 пересекаются в точке O (рис. 18.8в) (3, 5).

Замечание. Можно отдельно доказать п. 7. Проведите это доказательство самостоятельно.

8(2). Точка O равноудалена от всех вершин треугольника и, значит, является центром описанной окружности (рис. 18.8г) (3, 5, 6, определение описанной окружности). ■

Таким образом, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.

Рассмотрим свойства *треугольников, описанных около окружности.*

Определение 79. Треугольник, все стороны которого касаются окружности, называется описанным около этой окружности, а окружность — вписанной в этот треугольник.

На рис. 18.9 $\triangle ABC$ описан около окружности с центром в точке O.

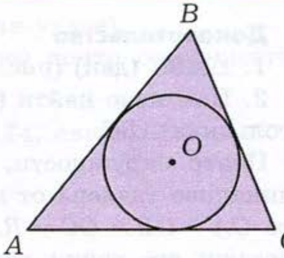


Рис. 18.9

Теорема 76. В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центром такой окружности является точка пересечения биссектрис углов треугольника.

Доказательство

1. Треугольник ABC (дан) (рис. 18.10).

2. Найти центр окружности, вписанной в треугольник ABC (требуется построить).

Центр O окружности, вписанной в данный треугольник ABC, должен быть равноудалён от всех его сторон. Следует вспомнить, что биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудалённых от его сторон.

3. Проведём биссектрису l_1 угла A (построение) (рис. 18.11а).

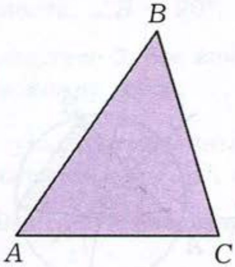


Рис. 18.10

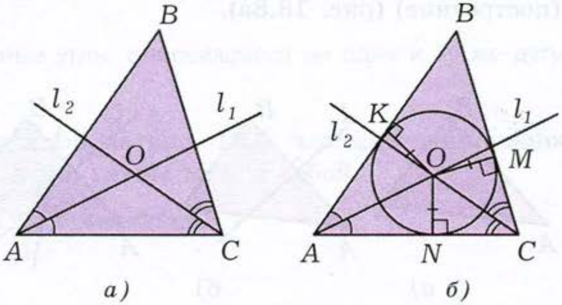


Рис. 18.11

4. Проведём биссектрису l_2 угла C (построение) (рис. 18.11а).

5. Биссектрисы l_1 и l_2 пересекутся в точке O (1, 3, 4).

Замечание. Тот факт, что биссектрисы l_1 и l_2 пересекутся, следует доказать отдельно (проведите это доказательство самостоятельно).

6. Точки биссектрисы l_1 одинаково удалены от сторон AB и AC, а точки биссектрисы l_2 одинаково удалены от сторон CA и CB (3, 4, свойство биссектрисы угла) (рис. 18.11б).

7. Точка O одинаково удалена от сторон AB, AC и BC (рис. 18.11б) (5, 6).

Замечание. Можно отдельно доказать, что луч BO является биссектрисой угла B.

8(2). Точка O — центр искомой вписанной окружности (7, определение вписанной окружности) (рис. 18.11б). ■

§ 18.3 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Определения вписанных и описанных четырёхугольников можно дать аналогично определениям вписанных и описанных треугольников.

Ответим на такой вопрос:

? Всякий ли четырёхугольник можно вписать в окружность? При каких условиях можно четырёхугольник вписать в окружность?

Из опыта мы знаем, что есть четырёхугольники, которые можно вписать в окружность. Например, квадрат всегда можно вписать в окружность (рис. 18.12). А вот ромб, не являющийся квадратом, вписать в окружность нельзя (рис. 18.13). Эти выводы опираются лишь на наши наблюдения.

Сформулируем и докажем *свойства вписанных в окружность четырёхугольников*.

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (дано) (рис. 18.14).

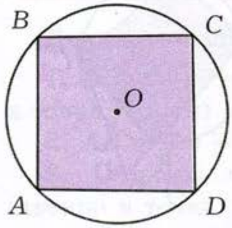


Рис. 18.12

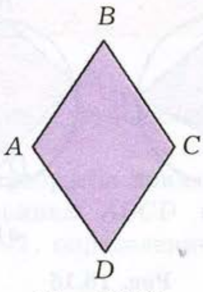


Рис. 18.13

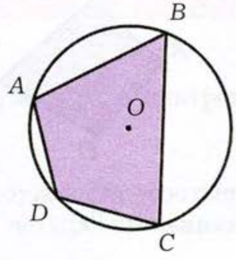


Рис. 18.14

Вспомним понятие вписанного угла и правила нахождения его величины.

2. $\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \smile DAB$ (1, Т.74).

3. Найдём сумму углов A и C:

$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \smile BCD + \frac{1}{2} \smile DAB = \frac{1}{2} (\smile BCD + \smile DAB)$ (1, 2, свойства измерения дуг окружности).

4. Объединение дуг BCD и DAB есть окружность, т.е.

$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$ (1, определение дуг окружности).

5. Сумма величин углов A и C равна угловой величине полуокружности (4, свойства измерения вписанных углов).

Таким образом, мы доказали следующее свойство:

Теорема 77. Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180°.

Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Сформулируем и докажем признак того, что четырёхугольник можно вписать в окружность.

Теорема 78. Если сумма двух противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Доказательство

1. Нам дан четырёхугольник $ABCD$, у которого сумма углов B и D равна 180°: $\angle B + \angle D = 180°$ (дано) (рис. 18.15а).

2. Около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность (требуется доказать).

Есть такая окружность или нет, мы пока не знаем, но всегда можно провести окружность через любые три точки, являющиеся вершинами треугольника (Т.75).

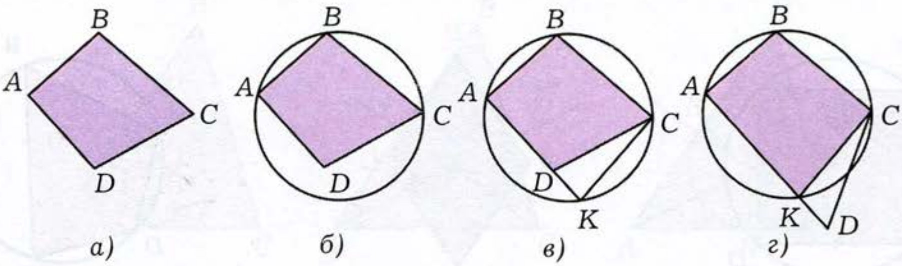


Рис. 18.15

3. Проведём через вершины A, B и C четырёхугольника $ABCD$ окружность (построение) (рис. 18.15б) (1, Т.75).

Для доказательства теоремы нужно доказать, что четвёртая вершина четырёхугольника (точка D) лежит на этой окружности, т.е. не может лежать внутри этой окружности или вне её.

4. Предположим, что точка D лежит внутри окружности (предположение) (рис. 18.15б).

5. Продолжим сторону AD до пересечения с окружностью в точке K и соединим точку K с точкой C (построение) (рис. 18.15в).

6. Получим четырёхугольник $ABCK$, вписанный в окружность (5, определение вписанного четырёхугольника).

7. $\angle B + \angle ADC = 180°$, $\angle B + \angle K = 180°$ (1, 3, 4, 6, Т.77).

8. $\angle ADC = \angle K$ (7).

9. $\angle ADC$ — внешний угол $\triangle CDK$ (4, 6, определение внешнего угла).

Выполнение п. 8 и п. 9 вместе невозможно, так как внешний угол треугольника KDC не может быть равен его внутреннему не смежному с ним углу. Значит, предположение п. 4 неверно: точка D не может лежать внутри построенной окружности.

Аналогично доказывается, что вершина D не может лежать вне этой окружности (рис. 18.15г).

10(2). Итак, вершина D не может лежать ни внутри окружности, ни вне её. Следовательно, точка D должна лежать только на этой окружности и D совпадает с K. ■

Рассмотрим *четырёхугольник, описанный около окружности.*

? Во всякий ли четырёхугольник можно вписать окружность?

Верно, например, что во всякий квадрат можно вписать окружность (рис. 18.16), а в «длинную» равнобедренную трапецию (рис. 18.17) вписать окружность не удастся.

Докажем свойство сторон описанного четырёхугольника:

Теорема 79. Суммы противолежащих сторон описанного около окружности четырёхугольника равны.

Доказательство

1. $ABCD$ — четырёхугольник, описанный около окружности с центром в точке O (дан) (рис. 18.18).

2. $AB + CD = AD + BC$ (требуется доказать).

3. Стороны четырёхугольника $ABCD$ касаются окружности соответственно в точках M, P, Q, N (1, определение описанного четырёхугольника) (рис. 18.18).

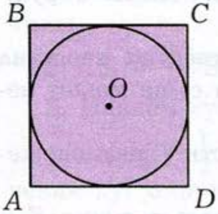


Рис. 18.16

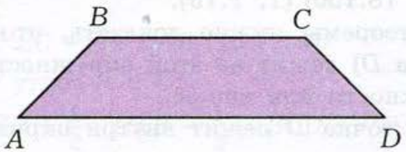


Рис. 18.17

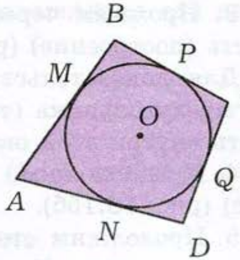


Рис. 18.18

4. $AM = AN$, $BM = BP$, $CQ = CP$, $DQ = DN$ (3, свойство касательных к окружности).

5(2). Сложив эти равенства почленно, получим: $AB + CD = AD + BC$. ■

Поскольку сумма $AB + CD + AD + BC$ представляет собой периметр четырёхугольника $ABCD$, то доказанную теорему можно сформулировать и так: «Сумма каждой пары противолежащих сторон описанного четырёхугольника равна его полупериметру».

Оказывается, верно и утверждение, обратное теореме 79.

Теорема 80. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Докажите этот признак самостоятельно.

Развиваем умения

К § 18.1

Н ⇓

1 На рис. 18.19 изображено несколько примеров взаимного расположения окружности и углов. Назовите на рисунке: а) вписанные углы; б) вершины и стороны вписанных углов.

2 На рис. 18.20 назовите: а) дугу, на которую опирается угол ABC, угол BCA, угол CAD; б) угол, который опирается на дугу BC, на дугу BCD.

Н ⇑

3 Углы AMC и ATC вписаны в одну и ту же окружность. На какие дуги опираются эти углы?

Н

4 Окружность разделена тремя точками на дуги, длины которых относятся как числа 2, 3 и 4, и точки деления соединены отрезками. Найдите углы полученного треугольника.

5 Данная хорда видна из некоторой точки окружности под углом $41^\circ 15'$. Найдите угловые величины дуг, на которые данная хорда делит окружность.

6 Точки A, B, C и D, взятые последовательно, принадлежат окружности, $\smile AD = 68^\circ$, $\smile BC = 140^\circ$, $\smile DC = 50^\circ$. Найдите:
а) $\smile AB$; б) $\angle BDC$ и $\angle BAC$; в) $\angle ABD$; г) $\angle ABC$; д) $\angle BCA$.

7 Окружность разделена точками A, B, C, D и E на пять равных дуг: $\smile AB = \smile BC = \smile CD = \smile DE = \smile EA$. Найдите величины вписанных в эту окружность углов BAC, BAD, BAE, CAE и DAE.

8 Центральный угол на 35° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Найдите величину каждого из этих углов.

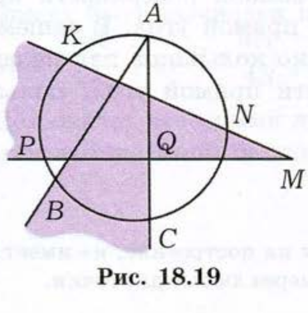


Рис. 18.19

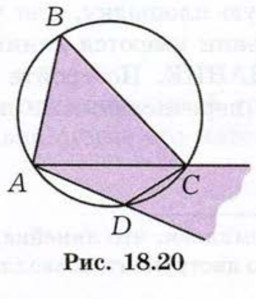


Рис. 18.20

П

9 Хорда делит окружность на две дуги, отношение величин которых равно 4 : 5. Под каким углом видна эта хорда из точек окружности? Рассмотрите точки, принадлежащие обеим дугам.

М

10 а) Докажите теорему: «Величина угла, образованного двумя секущими окружности, пересекающимися в точке, лежащей внутри окружности, равна полусумме величин дуг, высекаемых этим углом и углом, ему вертикальным».

б) Докажите теорему: «Величина угла с вершиной вне окружности и сторонами, пересекающими окружность, равна полуразности величин высекаемых этим углом дуг».

11 а) Дана окружность с проведённым диаметром и точка, лежащая внутри окружности, но не на диаметре. С помощью одной только линейки[1] проведите через данную точку прямую, перпендикулярную диаметру.

б) Решите предыдущую задачу, если точка лежит вне окружности.

М

12 Две касательные к окружности образуют угол 72°. Какую величину имеет каждая из высекаемых ими дуг?

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Построение прямого угла на земной поверхности.

ВАША РОЛЬ. Турист.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Во время похода по безлюдной местности туристам нужно разметить на ровном участке земной поверхности прямоугольную площадку, для чего нужно построить прямой угол. В вашем распоряжении имеются длинная верёвка и несколько колышков для палатки.

ЗАДАНИЕ. Постройте на земной поверхности прямой угол, пользуясь только перечисленными предметами.

---

[1] Напоминаем, что линейка, используемая в задачах на построение, не имеет делений. Это инструмент, позволяющий провести прямую через любые две точки.

К § 18.2

Н ⇓

13 ● В окр. (O, r) вписан треугольник ABC. Что можно сказать о вершинах, сторонах и углах треугольника ABC?

14 ● Около окр. (O, r) описан треугольник ABC. Назовите свойства его вершин, сторон и углов.

Н ⇑

15 ● Пусть нам дан треугольник, вписанный в окружность. Что можно сказать о центре окружности, описанной около этого треугольника?

Н

16 Постройте треугольник со сторонами 5 см, 6 см и 7 см и опишите около него окружность. Измерьте радиус этой окружности.

17 Дан остроугольный треугольник ABC; O — центр описанной около него окружности; $AD \perp BC$. Докажите, что $\angle BAD = \angle OAC$.

П

18 В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 см и 16 см. Вычислите радиус вписанной в него окружности.

19 Вычислите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, высота которого: а) $h = 1$ см; б) $h = 2{,}5$ см.

20 Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если его катеты равны 20 см и 20 см.

21 Впишите в данную окружность треугольник, подобный данному.

М

22 Докажите, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

23 Докажите, что радиус R окружности, описанной около треугольника, может быть вычислен по формулам:

а) $R = \dfrac{ab}{2h_c}$; б) $R = \dfrac{abc}{4S}$; в) $R = \dfrac{a}{2\sin A}$.

24 Докажите, что сумма диаметров вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него окружностей равна сумме его катетов.

К § 18.3

Н ⇓

25 ● В окр. (O, r) вписан четырёхугольник $ABCD$. Что можно сказать о вершинах, сторонах и углах этого четырёхугольника?

26 ● Около окр. (O, r) описан четырёхугольник $ABCD$. Назовите свойства его вершин, сторон и углов.

Н ⇑

27 Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, углы которого соответственно равны: а) 90°, 90°, 60°, 120°; б) 70°, 130°, 110°, 50°; в) 45°, 75°, 135°, 105°?

28 В каком случае около окружности можно описать четырёхугольник?

П

29 На рис. 18.21 $AB = CD$. Докажите, что четырёхугольник $ADBC$ — равнобедренная трапеция.

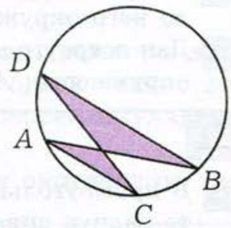


Рис. 18.21

30 Квадрат $ABCD$ на рис. 18.22 вписан в окружность, P — любая точка дуги AB, отличная от A и B. Докажите, что лучи PC и PD делят $\angle APB$ на три равные части.

31 Докажите истинность следующих утверждений.

а) Любая трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной.

б) Любой параллелограмм, вписанный в окружность, является прямоугольником.

в) Любой ромб, вписанный в окружность, является квадратом.

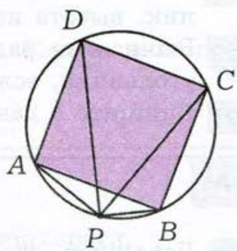


Рис. 18.22

32 Постройте квадрат, описанный около данной окружности.

33 Постройте квадрат по радиусу описанной около него окружности.

М

34 Углы описанного около окружности четырёхугольника, взятые по порядку, относятся как числа 1, 2, 3 и 2. Вычислите углы, под которыми видна каждая его сторона из центра вписанной в него окружности.

35 Радиус вписанной в трапецию окружности равен r. Точка касания делит боковую сторону трапеции на отрезки длиной a и b. Докажите, что $r^2 = ab$.

36 В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN. Докажите, что треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $|\cos A|$.

37 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BM и CN. Найдите радиусы описанных окружностей для треугольников BMN и CMN, если $BC = 10$ см.

38 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK, BM и CN. Докажите, что они являются биссектрисами треугольника KMN.

39 Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K. Докажите, что $KA \cdot KB = KC \cdot KD$.

40 Из точки K, лежащей вне окружности, проведены два луча, один из которых пересекает окружность в точках A и B, а второй — в точках C и D (рис. 18.23). Докажите, что $KA \cdot KB = KC \cdot KD$.

Замечание. Прямые AB и CD на рис. 18.23 называются секущими для окружности. Доказываемое утверждение часто формулируется так: произведения отрезков каждой из секущих, проведённых к окружности из одной точки, равны (все отрезки отмеряются от одной и той же точки).

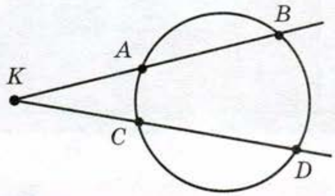


Рис. 18.23

41 Из точки K, лежащей вне окружности, проведены два луча, один из которых пересекает окружность в точках A и B, а второй касается окружности в точке E (рис. 18.24). Докажите, что $KE^2 = KA \cdot KB$.

Другая формулировка: если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению отрезков секущей (все отрезки отмеряются от одной и той же точки).

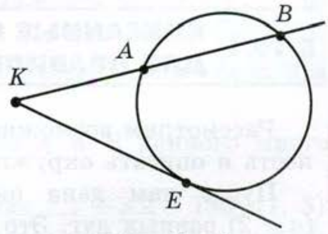


Рис. 18.24

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Определение расстояния до линии горизонта.

ВАША РОЛЬ. Любознательный путешественник.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. Человек ростом 1 м 85 см стоит на плоской степной равнине.

ЗАДАНИЕ. а) Определите расстояние до видимой человеку линии горизонта.

б) Тот же вопрос, но при условии, что человек поднимется на геодезическую вышку высотой 10 м.

Глава 19

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Вкусив от сладкого плода математики хоть раз, ... мы не хотим от неё оторваться...

Аристотель
(древнегреческий философ и учёный, 384–322 до н.э.)

Открываем новые знания

§ 19.1 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ ДЛЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрим возможности вписать правильный многоугольник в окружность и описать окружность около него.

Пусть нам дана окружность. Разделим её на n ($n > 2$) равных дуг. Это можно сделать, построив последовательно центральные углы, величина каждого из которых равна $\frac{360^\circ}{n}$.

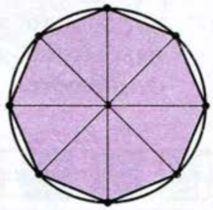


Рис. 19.1

На рис. 19.1 мы разделили окружность на 8 равных дуг. Соединим последовательно точки деления хордами. При повороте вокруг центра окружности на угол $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ построенный многоугольник переходит в себя. Значит, все стороны полученного многоугольника и все его углы равны. Мы получили правильный многоугольник, вписанный в окружность.

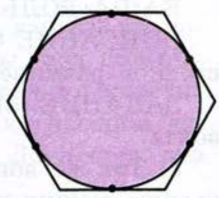


Рис. 19.2

Поступим иначе. Разделим окружность на n равных дуг ($n > 2$). На рис. 19.2 мы разделили окружность на

6 равных дуг. Через точки деления проведём касательные к этой окружности (рис. 19.2). Образованный при этом многоугольник (его вершинами служат точки пересечения касательных, проведённых через соседние точки деления) будет правильным многоугольником, описанным около окружности.

Докажем две теоремы.

Теорема 81. Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.

Доказательство

1. $ABCD...L$ — правильный многоугольник (дан) (рис. 19.3а).

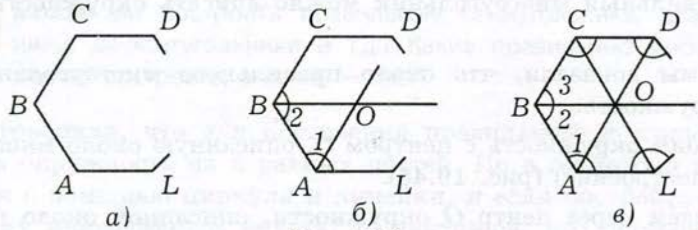


Рис. 19.3

2. Около правильного многоугольника можно описать окружность (требуется доказать).

Для доказательства теоремы нам понадобятся биссектрисы углов правильного многоугольника.

3. Построим биссектрисы двух соседних углов A и B данного многоугольника (построение) (рис. 19.3б).

4. Биссектрисы углов A и B пересекутся, так как $\angle 1 + \angle 2 < 180°$ (1, 3).

5. Точку O пересечения этих биссектрис соединим отрезками с остальными вершинами данного многоугольника (построение) (рис. 19.3в).

6. Так как углы A и B равны, то равны и их половины: $\angle 1 = \angle 2$ (1, 5).

7. Треугольник AOB — равнобедренный, $OA = OB$ (6, определение равнобедренного треугольника).

Нам нужно доказать, что точка O находится на одинаковом расстоянии от всех вершин многоугольника.

Рассмотрим $\triangle OCB$ и $\triangle OAB$.

8. Отрезок OB — их общая сторона, $AB = BC$, $\angle 2 = \angle 3$ (1, 5).

9. $\triangle AOB = \triangle BOC$ (5, 8, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

10. $OA = OC$ (9).

11. $OA = OB = OC$ (7, 10).

12. Рассматривая равные треугольники AOB и COD, BOC и COB и т.д., приходим к выводу: $OA = OB = OC = ... = OL$ (11).

13(2). Все вершины данного многоугольника лежат на окружности с центром O (12). ■

Докажем, что во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.

Теорема 82. Во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.

Доказательство

1. $ABCD...M$ — правильный многоугольник (дан) (рис. 19.4а).

2. В правильный многоугольник можно вписать окружность (требуется доказать).

В Т.81 мы доказали, что около правильного многоугольника можно описать окружность.

3. Построим окружность с центром O, описанную около многоугольника $ABCD...M$ (построение) (рис. 19.4б).

4. Проведём через центр O окружности, описанной около правильного многоугольника $ABCD...M$, перпендикуляры к его сторонам. Обозначим их основания через A_1, B_1, C_1, ..., M_1 (построение) (рис. 19.4в).

5. При повороте вокруг центра O на угол $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$ многоугольник $ABCD...M$ и окр. (O, r) перейдут в себя (объясните почему). Поэтому точка A_1 перейдёт в точку B_1, точка B_1 — в точку C_1 и т.д. Точка M_1 перейдёт в точку A_1 (1, 3, 4, определение поворота).

6. $OA_1 = OB_1 = OC_1 = ... = OM_1$ (5, свойства поворота).

7(2). Точки A_1, B_1, C_1, ..., M_1 лежат на одной окружности с центром O (6, определение окружности). ■

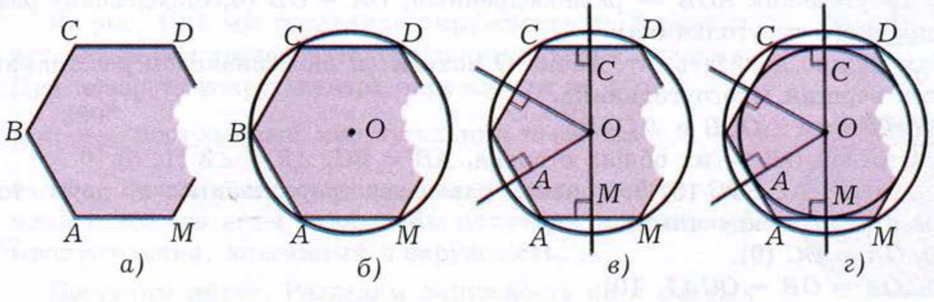


Рис. 19.4

По построению $OA_1 \perp AB$, $OB_1 \perp BC$, ... Значит, любая сторона данного многоугольника касается данной окружности (рис. 19.4г).

Общий центр окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в правильный многоугольник, называется *центром правильного многоугольника*.

Отрезок OA_1 (рис. 19.4г) перпендикуляра, проведённого из центра правильного многоугольника к его стороне, называется *апофемой правильного многоугольника* (апофема является радиусом вписанной окружности).

§ 19.2* ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Можно ли построить правильные семиугольники, двадцатиугольники, двухсотугольники и т.д.? Какие правильные многоугольники можно построить, а какие — нет?

Мы уже говорили, что для построения правильного n-угольника нужно разделить окружность на n равных частей. Но в геометрии построения выполняются с помощью циркуля и линейки, и если построить что-либо с помощью этих инструментов нельзя, то считается, что построение невозможно.

Учёных древности очень интересовала проблема построения правильных многоугольников, предпринималось много попыток её решения. Но основной результат был получен только в 1801 году великим немецким математиком *Карлом Фридрихом Гауссом* (1777—1855). Используя алгебраические методы, Гаусс доказал, что правильный многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки, если n (число сторон) выражается следующей формулой: $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_l$, где m — неотрицательное целое число, p_1, p_2, p_3, ..., p_l — простые числа вида $2^{2^k} + 1$ (k — неотрицательное целое число). Например, число 5 имеет такой вид, а число 7 не имеет. Проверьте дальше возможность построения правильных n-угольников для различных n.

Карл Фридрих Гаусс

К.Ф. Гаусс занимался решением этой проблемы для $n = 17$. Учёный так ценил этот свой результат, что завещал на своём надгробии изобразить правильный 17-угольник.

§ 19.3 ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТОРОНЫ, ПЕРИМЕТРА И ПЛОЩАДИ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Найдём формулу для вычисления сторон правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.

1. Пусть AB — сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 19.5а).

2. Нам нужно найти формулу для вычисления AB через радиус описанной около правильного многоугольника окружности.

Чтобы получить нужную нам формулу, полезно рассмотреть $\triangle AOB$ и провести в нём высоту (рис. 19.5б).

3. Построим $\triangle AOB$ и проведём в нём высоту OD (построение) (рис. 19.5б).

4. $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{n}$ (1, определение вписанного правильного многоугольника).

5. $\triangle AOB$ — равнобедренный (1, определение равнобедренного треугольника).

6. В прямоугольном треугольнике AOD имеем:

$\angle AOD = \dfrac{1}{2}\angle AOB = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{360^\circ}{n} = \dfrac{180^\circ}{n}$ (1, 3, 4, свойства равнобедренного треугольника).

7. $AD = AO\cdot\sin AOD = R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ (5, определение синуса острого угла прямоугольного треугольника).

8. $AB = 2\ AD$ (1, 2, 4).

9. $AB = 2R\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ (6, 7). ■

Сторону правильного n-угольника принято обозначать через a_n. Поэтому выведенную формулу можно записать так:

$$a_n = 2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Мы доказали теорему.

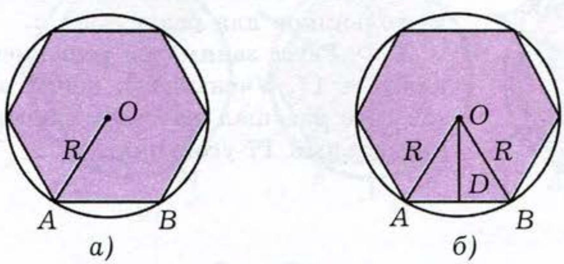


Рис. 19.5

Теорема 83. Сторона a_n правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности следующей формулой:

$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$, где R — радиус описанной окружности.

Из теоремы 83 можно вывести следствия:

Следствие 1. $a_6 = R$.

Если $n = 6$, то $a_6 = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\frac{1}{2} = R$.

Следствие 2. $a_4 = R\sqrt{2}$.

Если $n = 4$, то $a_4 = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\sqrt{2}$.

Следствие 3. $a_3 = R\sqrt{3}$.

Если $n = 3$, то $a_3 = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\sqrt{3}$.

Следствие 4. Периметр P_n правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, *выражается формулой* $P_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Докажите это следствие самостоятельно.

Следствие 5. Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных около них окружностей.

1. Пусть P_1 и P_2 — периметры правильных n-угольников, вписанных в окружности радиусов R_1 и R_2 соответственно.

2. $P_1 = n \cdot 2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = n \cdot 2R_2 \sin\frac{180^\circ}{n}$.

3. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$. ■

Используя всё вышесказанное, можно найти площадь правильного n-угольника через радиус вписанной в него окружности.

Теорема 84. Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной в него окружности:

$$S = \frac{1}{2}Pr,$$

где P — периметр многоугольника, r — радиус вписанной в него окружности.

Доказательство

1. Правильный многоугольник, в него вписана окружность с центром O и радиусом r (дано) (рис. 19.6а).

2. $S = \frac{1}{2}Pr$, где P — периметр многоугольника, r — радиус вписанной в него окружности (требуется доказать).

Используем метод доказательства теоремы 83 и разобьём n-угольник на треугольники.

3. Разобьём правильный n-угольник на n треугольников, соединяя отрезками вершины n-угольника с центром вписанной окружности (рис. 19.6б). Эти треугольники равны. (Обоснуйте этот вывод отдельно.)

4. Площадь каждого из треугольников равна $\frac{1}{2}a_n r$, где a_n — сторона правильного n-угольника, r — радиус вписанной окружности (1, формула площади треугольника).

5. Площадь S многоугольника равна $\frac{1}{2}a_n rn$, (4, свойства площади).

6. $a_n n = P$ (1, определение периметра многоугольника).

7(2). $S = \frac{1}{2}Pr$ (5, 6). ■

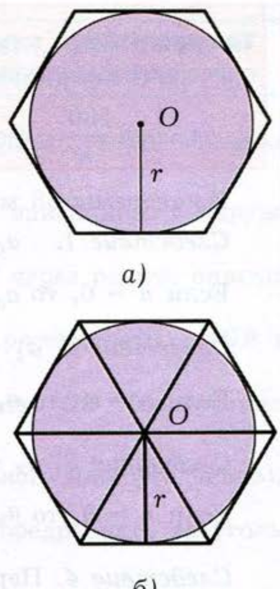


Рис. 19.6

Можно находить площадь правильного многоугольника по формуле

$$S = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360^\circ}{n},$$

где R — радиус описанной около правильного многоугольника окружности.

Проверьте справедливость этой формулы самостоятельно.

§ 19.4 ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

Свойства вписанных и описанных правильных многоугольников подводят нас к важному для курса геометрии понятию *длины окружности*.

Представим себе правильный n-угольник, вписанный в окружность. Мы умеем находить периметр такого многоугольника. Будем увеличивать число его сторон, например, используя их удвоение, и каждый раз будем измерять периметры получившихся многоугольников. Ясно, что последовательность получившихся периметров будет приближаться к некоторому числу, которое и называется длиной окружности.

Точное определение длины окружности можно дать, используя теорию пределов, которую вы будете изучать лишь в старших классах. Поэтому всё сказанное в этом параграфе о длине окружности имеет ознакомительный характер.

Вы знаете, что любые две окружности подобны друг другу с коэффициентом подобия, равным отношению их диаметров. В том же отношении находятся и длины окружностей. Обозначим длину окружности через C. Для длин C_1 и C_2 двух окружностей с диаметрами d_1 и d_2 имеем:

$$C_1 : C_2 = d_1 : d_2 \quad \text{или} \quad \frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2}.$$

Значит, длины окружностей пропорциональны их диаметрам.

Следовательно, мы можем записать это в таком виде: $\frac{C}{d} = \pi$.

Греческой буквой π принято обозначать отношение длины окружности к диаметру. Это иррациональное число; оно приблизительно равно 3,1415926535...

Итак,

$$C = \pi d.$$

Через радиус длина окружности выражается формулой:

$$C = 2\pi r.$$

Длина дуги в n° вычисляется по формуле:

$$l = \frac{2\pi r}{360} \cdot n = \frac{\pi r n}{180},$$

так как длина дуги в 1° равна $\frac{1}{360}$ длины окружности.

В заключение этого раздела покажем на довольно простом примере, почему число π находится между числами 3 и 4.

1. Пусть радиус окружности $r = \frac{1}{2}$. Тогда $C = \pi$.

2. Периметр шестиугольника на рис. 19.7 равен $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$. Он меньше длины окружности.

3. Периметр квадрата на том же рисунке равен $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$. Он больше длины окружности.

4. Значит, $3 < \pi < 4$.

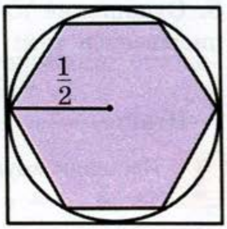


Рис. 19.7

§ 19.5 ПЛОЩАДЬ КРУГА

Рассмотрим проблему нахождения *площади круга*. Как и в случае с длиной окружности, воспользуемся свойствами вписанных и описанных правильных многоугольников.

Для нахождения площади круга рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в соответствующую окружность (рис. 19.8). При увеличении числа сторон такие многоугольники занимают всё большую и большую часть круга, и при достаточно большом количестве сторон нам будет казаться на чертеже, что они сливаются с кругом. Поэтому площадью круга считают число, к которому стремятся площади вписанных правильных многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон.

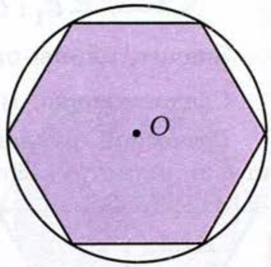


Рис. 19.8

Как и в случае с длиной окружности, для точного вывода формулы площади круга необходимы знания теории пределов. Поэтому всё сказанное ниже также имеет предварительный характер.

Известно, что отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату их коэффициента подобия.

Любые два круга подобны. Коэффициент подобия двух кругов равен отношению их диаметров или радиусов. Следовательно, площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов. Обозначим площадь круга через S. Отношение площадей S_1 и S_2 двух кругов, радиусы которых r_1 и r_2, записывается так:

$$S_1 : S_2 = r_1{}^2 : r_2{}^2 \quad \text{или} \quad \frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}.$$

Итак:

! Площади кругов пропорциональны квадратам их радиусов.

Коэффициент их пропорциональности, как и в случае с длиной окружности, равен числу π. Таким образом:

$$\frac{S}{r^2} = \pi \quad \text{или} \quad S = \pi r^2.$$

Через диаметр площадь круга выражается формулой:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

В древности, когда о числе π ещё не было известно, существовали другие способы вычисления площади круга. Приведём один из вариантов рассуждений того времени.

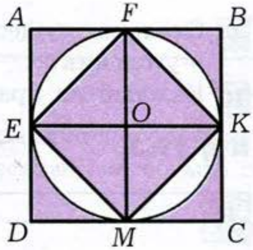


Рис. 19.9

На рис. 19.9 изображены круг и два квадрата $ABCD$ и $EFKM$. Радиус круга равен r, поэтому длина стороны квадрата $ABCD$ равна $2r$, а его площадь равна $4r^2$. Площадь треугольника EOF вдвое меньше площади квадрата $AEOF$, поэтому площадь квадрата $EFKM$ вдвое меньше площади квадрата $ABCD$, то есть равна $2r^2$. Площадь круга S больше площади квадрата $EFKM$, но меньше площади квадрата $ABCD$: $2r^2 < S < 4r^2$.

Развиваем умения

К § 19.1

Н

1 Вычислите для правильного n-угольника ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$): а) величину каждого внутреннего угла; б) величину каждого внешнего угла.

2 Найдите число сторон правильного многоугольника, если:
1) его внутренний угол равен: а) 135°; б) 150°; в) 140°;
2) его внешний угол равен: а) 36°; б) 24°; в) 60°.

3 Докажите, что центральный угол правильного многоугольника, опирающийся на его сторону, равен его внешнему углу.

П

4 Постройте правильный n-угольник по данной стороне ($n = 5, 6, 8$).

5 Впишите в данную окружность правильный n-угольник ($n = 3, 4, 6, 8, 12$).

6 Опишите около данной окружности правильный n-угольник ($n = 3, 4, 6, 8$).

М

7 При какой изометрии переходит в себя: а) правильный пятиугольник; б) правильный шестиугольник?

8 Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник? Как они расположены?

9 Сколько существует поворотов, переводящих в себя правильный n-угольник?

10 Каждый ли правильный многоугольник имеет центр симметрии?

К § 19.3

Н

11 Выразите радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, через сторону a_n этого многоугольника, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

12 В окружность радиуса 6 см вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Вычислите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

13 Вычислите площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = 8$ см, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

14 Вычислите площадь правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса $r = 4$ см, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

15 Стороны двух правильных одноимённых многоугольников равны a и b.

а) Как относятся периметры этих многоугольников?

б) Как соотносятся площади этих многоугольников?

П

16 В окружность вписаны и около неё описаны правильные n-угольники. Для $n = 3, 4, 6$ вычислите отношение: а) их периметров; б) их площадей.

17 Из заготовки цилиндрической формы выточен болт с квадратной головкой наибольших размеров. Каково расстояние между противоположными гранями этой головки, если диаметр заготовки равен: а) 20 мм; б) 8 мм?

18 Из заготовки, имеющей форму правильной шестиугольной призмы, изготовлен цилиндр наибольшего диаметра. Вычислите диаметр цилиндра, если расстояние между противоположными боковыми рёбрами заготовки равно: а) 16 мм; б) 12 мм.

М

19 Через середины двух смежных сторон квадрата, вписанного в окружность радиуса R, проведена хорда. Какова длина этой хорды, если: а) $R = 2$ см; б) $R = 3$ см?

К § 19.4

Н ⇓

20 Чему приблизительно равна длина окружности, радиус которой равен 1? Дайте ответ с точностью до: а) целых; б) десятых; в) сотых; г) тысячных.

Н ⇑

21 Как изменится длина окружности, если: а) её радиус увеличится в n раз; б) радиус уменьшится в n раз?

Н

22 Вычислите длину окружности, если её радиус равен: а) 12,5 см; б) 6 дм.

23 Вычислите радиус окружности, длина которой равна: а) 78,5 см; б) 12,42 дм.

24 Какой радиус имеет окружность, длина которой равна π?

25 Земля вращается вокруг Солнца по почти круговой орбите. Расстояние от Земли до Солнца равно приблизительно 140 млн км. Найдите длину пути, который Земля делает ежегодно, вращаясь вокруг Солнца.

26 Круглый бассейн диаметром 10,5 м обнесён оградой в форме квадрата. Общая длина ограды вдвое больше длины окружности бассейна. Какую длину имеет одна сторона этой квадратной ограды?

27 Чтобы найти диаметр дерева, измерили его обхват (длину окружности). Найдите диаметр дерева, если его обхват равен: а) 2 м; б) 1,5 м.

28 Колесо тепловоза делает 6 оборотов в секунду. Диаметр колеса равен 120 см. Найдите скорость движения тепловоза.

29 Постройте окружность, длина которой равна: а) 12 см; б) 18 см (построение проводится приближённо).

30 Радиус основания конуса равен 4 см. Найдите длину окружности основания конуса.

П

31 Радиусы трёх окружностей равны 1 м, 10 м и 10 000 м. Радиус каждой окружности увеличили на 1 м, и новые радиусы стали равны соответственно 2 м, 11 м и 10 001 м. На сколько при этом увеличилась длина каждой окружности?

32 Чтобы поднять из колодца ведро воды, вал должен сделать 18 оборотов. Вычислите глубину колодца, если диаметр вала равен 20 см.

М

33 Постройте окружность, длина которой равна: а) сумме длин двух данных окружностей; б) разности их длин.

К § 19.5

Н ⇑

34 Как изменится площадь круга и длина его окружности, если: а) диаметр уменьшить в 4 раза; б) радиус увеличить в 3 раза?

Н

35 Вычислите площадь круга, диаметр которого равен: а) 4 см; б) 10 м.

36 Выразите площадь круга через длину его окружности.

37 Чему равна площадь круга, если длина окружности равна: а) 4; б) 2π; в) 10π?

38 Вычислите площадь сечения провода, если его диаметр равен: а) 3 мм; б) 0,2 мм.

39 Вычислите площадь поперечного сечения дерева, если его обхват (длина окружности) равен: а) 88 см; б) 4 дм.

40 Радиус основания конуса равен 2 см. Найдите площадь основания конуса.

41 Окружность арены в цирке имеет длину 40,8 м. Найдите площадь арены.

П

42 В Древнем Египте площадь круга считалась равной площади квадрата, сторона которого равна $\frac{8}{9}$ диаметра этого круга. Каким значением числа π пользовались египетские математики?

43 Постройте круг (построение приближённое), площадь которого равна: а) сумме площадей двух данных кругов; б) их разности.

44 Постройте окружность, которая делила бы данный круг на две равновеликие фигуры: кольцо и круг.

М

45 Докажите, что сумма площадей двух фиолетовых луночек (рис. 19.10) равна площади прямоугольного треугольника.

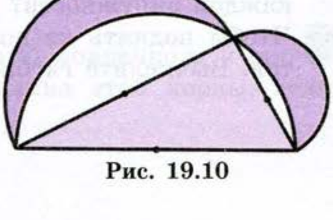


Рис. 19.10

46 Докажите, что сумма площадей полукругов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, как на диаметрах, равна площади полукруга, построенного на гипотенузе.

Жизненная задача

СИТУАЦИЯ. Определение расстояния до эпицентра землетрясения[1].

ВАША РОЛЬ. Сейсмолог.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИИ. При мощных землетрясениях поверхностная сейсмическая волна от подземного толчка может, постепенно затухая, несколько раз обогнуть земной шар. Сейсмограф на сейсмической станции в момент $t_1 = 11$ ч 15 мин 35 с по местному времени зарегистрировал возмущение от сильного подземного толчка, в момент $t_2 = 13$ ч 16 мин 15 с – второе, более слабое возмущение, а в момент $t_3 = 14$ ч 27 мин 04 с – третье, ещё более слабое возмущение от того же толчка.

ЗАДАНИЕ. Считая, что сейсмическая волна распространяется вдоль поверхности Земли по всем направлениям с одинаковой скоростью, найдите величину этой скорости, а также расстояние вдоль поверхности Земли от эпицентра землетрясения до сейсмической станции.

---

[1] Предлагалась на заочном туре олимпиады «Ломоносов» по геологии в 2011 г.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

К § 1.1

1. Прямая содержит бесконечно много точек.
2. а) Прямая a проходит через точки A, K и B; прямая b — через точки A, M и C, прямая c — через точки C, D и B; б) на прямой b лежат точки C, M и A; в) на прямой c не лежат точки M, A и K.
3. Плоскость α содержит бесконечно много точек.
4. Точки прямой принадлежат плоскости. Плоскость содержит бесконечное количество точек данной прямой.
5. Можно, и только одну.
6. Точка может лежать на прямой и не лежать на ней.
7. Плоскость задают три точки, не лежащие на одной прямой.
9. Две точки прямой a должны принадлежать плоскости α.
10. Бесконечное множество.
11. Через данную точку можно провести бесчисленное множество прямых.
13. 6 прямых.
15. На 11 частей.
16. Две плоскости могут разбивать пространство на 3 или 4 части (области). Три плоскости могут разбивать пространство на 4, 6, 7, 8 частей (областей).

К § 1.2

17. а) 3 отрезка.
18. На рис. 1.11а — 3 отрезка, на рис. 1.11б — 6 отрезков.
19. Два отрезка могут иметь одну общую точку, не иметь общих точек или иметь бесконечное множество общих точек (пересекаться по отрезку).
20. Прежде всего следует выделить два случая: а) отрезок и прямая лежат в одной плоскости; б) отрезок и прямая лежат в разных плоскостях.
21. а) Отрезок может принадлежать плоскости; б) отрезок и плоскость могут иметь только одну общую точку; в) отрезок и плоскость могут не иметь общих точек.
22. 120 мм.
24. $BC = 3$.
26. а) 3 отрезка; б) 6 отрезков; в) 10 отрезков.
27. $AB = 30$ см $= 3$ дм.
28. Чтобы на прямой получить 3 отрезка, на ней нужно отметить 3 точки.

ГЛАВА 2

К § 2.1

1. Два луча AB и AC с общим началом — точкой A и две области — внутренняя и внешняя.
2. От данного луча можно отложить два угла, равных 60°, в две разные полуплоскости.
3. Острый — а), прямой — б) и тупой — в). Острый угол имеет величину меньше 90°, прямой угол равен 90°, тупой угол имеет величину больше 90°.
4. Чтобы образовался угол, два луча должны иметь общее начало. При этом образуются два различных угла.
5. Развёрнутые углы изображены на рисунках в) и е). Углы на рисунках а) и б) меньше развёрнутого, на рисунках г) и д) — больше развёрнутого.

6. Будет.

7. а) $4° = 240'$; б) $10° = 600'$;
в) $10°10' = 610'$; г) $2°20'' = 120\frac{1}{3}'$.

8. а) $1° = 3\,600''$; б) $10° = 36\,000''$;
в) $10°10' = 36\,600''$; г) $2°20'' = 7\,220''$.

9. 80°.

10. 40°.

14. а) $62°1'4''$; б) $77°2'34''$;
в) $24°12'12''$; г) $253°48'$; д) $93°1'30''$;
е) $48°1'47''$.

15. а) 15°; б) 26°; в) 86°.

К § 2.2

18. $\angle COA$.

19. $\angle KOA$ и $\angle KOB$; $\angle MOA$ и $\angle MOB$.

20. Нельзя.

21. Нельзя.

22. а) Неверно (оба угла могут быть прямыми); б) неверно.

23. Да, равны.

24. $\beta = 150°$.

27. 150°, 135°, 90°, 164°30′, 97°58′.

28. а) 67°30′, 112°30′; б) 65°, 115°;
в) 30°, 150°; г) 90°, 90°; д) 72°, 108°.

29. 130°.

31. а) Нет; б) нет; в) да.

32. 90°.

К § 2.3–2.4

33. Вершина трёхгранного угла — точка O; рёбра – OA, OB и OC. Трёхгранный угол имеет три ребра и три грани.

34. Вершина угла — точка O. Рёбра угла – OA, OB, OC и OD. Грани угла – AOB, BOC, COD и AOD. Четырёхгранный угол имеет четыре ребра, четыре грани, четыре плоских угла.

35. На рис. 2.33 три луча имеют общее начало — точку O, на рис. 2.34 — четыре луча.

36. 8 трёхгранных углов, плоские углы которых прямые.

39. Могут, в сечении получится треугольник.

ГЛАВА 3

К § 3.1

1. Всего по три: 3 вершины, 3 стороны, 3 угла.

2. Основание — AC, боковые стороны — AB и BC.

3. Является.

5. На рис. 3.30а изображено 3 треугольника, на рис. 3.30б — 5 треугольников, на рис. 3.30в — 8 треугольников, на рис. 3.30г — 8 треугольников.

6. $BC = 10$ см, $AC = 8$ см, $P = 23$ см.

7. $AB = BC = 20$ см, $AC = 10$ см.

8. $AB = BC = 5$ см, $AC = 3$ см.

9. а) 27 треугольников; б) 32 треугольника; в) 27 треугольников.

11. Для непересекающихся треугольников ответ положительный.

12. Можно. В пространстве — тетраэдр.

К § 3.2–3.3

14. Ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5$ имеет 4 звена. Точка A_1 — начало ломаной, точка A_5 — конец ломаной. Ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5$ незамкнутая, её соседние звенья не лежат на одной прямой.

15. а) Многоугольник имеет 6 сторон и 6 вершин; б) многоугольник имеет 6 внутренних углов.

16. Стороны многоугольника равны между собой, углы многоугольника равны между собой.

17. Ломаные отличаются тем, что одна из них незамкнутая, а вторая — замкнутая.

18. в) Первая ломаная не имеет самопересечений, она простая. Вторая ломаная имеет самопересечения, она не является простой.

19. а) Четырёхугольник имеет 2 диагонали; б) пятиугольник — 5 диаго-

налей; в) шестиугольник — 9 диагоналей.

20. Стороны многоугольника равны между собой, углы многоугольника равны между собой.
21. Выпуклыми являются фигуры, изображённые на рис. 3.37а и 3.37в.
22. а) Существует; б) существует, число сторон такого многоугольника должно быть больше 5.
23. 10 см.
25. На 3 треугольника.
29. а) 30 треугольников; б) 32 треугольника; в) 68 треугольников.
30. Многоугольник со 103 сторонами имеет 5150 диагоналей. Многоугольник с n сторонами имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагонали.

К § 3.4

31. а) Куб имеет 8 вершин; б) куб имеет 12 рёбер; в) в одной вершине куба сходятся три ребра; г) гранями куба являются равные квадраты.
32. 6 квадратов.
33. 6 многоугольников.
34. Куб.
35. Существуют.
36. Могут.
37. Кубику с номером 6.
38. б) и в).
41. 7 отрезков.
42. 8 отрезков.

ГЛАВА 4

К § 4.1

1. а) Треугольная пирамида имеет 4 грани и 6 рёбер; б) четырёхугольная пирамида имеет 5 граней и 8 рёбер; в) пятиугольная пирамида имеет 6 граней и 10 рёбер; г) девятиугольная пирамида имеет 10 граней и 18 рёбер.
2. 4 трёхгранных угла.
3. В четырёхугольной пирамиде 4 трёхгранных угла, в пятиугольной — 5; в n-угольной пирамиде — n.
4. а) Нет; б) да; в) нет; г) да.
5. Треугольник, четырёхугольник.
10. Нельзя.
11. Нужно сложить из спичек каркас четырёхугольной пирамиды.

К § 4.2

12. Из 4 треугольников.
13. Могут.
16. Первая развёртка является развёрткой четырёхугольной пирамиды; вторая — развёрткой прямоугольного параллелепипеда.
17. AB и BC, DC и DE, FE и FA. Получится тетраэдр.
18. Развёртка поверхности правильной четырёхугольной пирамиды.

ГЛАВА 5

К § 5.1

3. а) Не принадлежит; б) принадлежит.
4. а) Лежит вне сферы; б) лежит вне сферы; в) лежит внутри сферы.
5. а) Неверно; б) верно; в) верно; г) верно.
6. 10 см.
7. 20 см.
8. а) Да; б) да; в) да; г) нет.
10. а) Окружность; б) окружность.
11. а) Окружности имеют одну общую точку, т.е. касаются; б) окружности имеют две общие точки, т.е. пересекаются; в) окружности не имеют общих точек, т.е. не пересекаются; г) окружности касаются; д) окружности пересекаются; е) окружности пересекаются, причём каждая окружность проходит через центр второй окружности.
13. Задача имеет решение, если эти окружности пересекаются или касаются (внутренним

или внешним образом), т.е. когда $|a - b| \leqslant AB \leqslant a + b$.

16. При правильной игре всегда выигрывает тот, кто делает первый ход. Задача сводится к разбиению 10-угольника на треугольники. Можно поступить иначе: первый игрок соединяет две противоположные точки, а затем на каждый ход противника отвечает симметричным.

18. Можно.

К § 5.2—5.3

20. а) $A_1B_1 = 5$ см, $\angle A_1 = 90°$; б) $A_1B_1 = 2$ см, $B_1C_1 = 4$ см, $C_1A_1 = 8$ см; в) $\angle A_1 = 34°$, $\angle B_1 = 56°$; г) $\angle A_1 = 76°$, $AB = 10$ см, $CA = 5$ см.

23. Основной способ — воспользоваться определением 29.

24. а) Верно; б) неверно; в) неверно; г) верно.

ГЛАВА 6

К § 6.1

1. а) Точка A перейдёт в точку A_1, точка B — в точку B_1, точка C — в точку C_1; б) стороны AB, BC и CA перейдут в стороны A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1; в) $\angle ABC$, $\angle BCA$ и $\angle CAB$ перейдут соответственно в равные им $\angle A_1B_1C_1$, $\angle B_1C_1A_1$ и $\angle C_1A_1B_1$; г) треугольник ABC перейдёт в равный ему треугольник $A_1B_1C_1$; д) сохранятся длины сторон треугольников. Кроме того, будут соответственно равны расстояния от центра поворота до соответствующих вершин треугольников; е) на месте останется центр поворота.

2. Точкой, переходящей в себя, всегда является центр поворота. При произвольном повороте нет переходящих в себя прямых. При повороте на 180° прямая переходит в себя, если центр поворота принадлежит этой прямой.

3. Поворот может быть выполнен в двух противоположных направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки.

4. Это преобразование не сохраняет расстояний между соответствующими точками.

5. Прямая перейдёт в прямую.

6. Окружность (круг) переходит в окружность (круг). Нужно построить точку, в которую перейдёт центр окружности, и провести окружность данного радиуса. Если центр окружности совпадает с центром поворота, окружность (круг) переходит сама в себя при любом угле поворота.

К § 6.2—6.3

13. Окружность, сфера, куб, квадрат.

14. При изометрии сохраняются расстояния между соответствующими точками.

15. Центр симметрии.

16. Прямые, проходящие через центр симметрии.

17. Середина отрезка AA_1.

19. Сама в себя.

21. а) Имеет; б) имеет; в) не имеет; г) имеет; д) имеет; е) не имеет.

25. Существуют.

ГЛАВА 7

К § 7.1

1. Одна.

2. 8 прямых. В вершине пирамиды — 4 прямые, в вершинах оснований — 3 прямые.

3. 4 угла, эти углы попарно равны.

4. 2 пары вертикальных углов и 4 пары смежных.

5. В каждой вершине треугольной пирамиды пересекаются три прямые, содержащие её рёбра.

6. Сами в себя.

7. При пересечении двух прямых образуются две пары равных вертикальных углов.

8. а) Могут; б) могут; в) не могут.
9. Неверно.
10. 30°, 150°, 150°.
11. а) Один из углов равен 80°; б) один из углов равен 120°; в) один из углов равен 50°.
14. 180°.
15. $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COE = 110°$, $\angle COD = 60°$.
16. Не принадлежит.
19. На 4, 6, 7 частей.

К § 7.2

21. а) Круг с центром O и радиусом OC; б) BA и BC.
22. Не может.
23. Из круга и кругового сектора.
25. Нет.
26. а) Равнобедренным треугольником; б) равносторонним треугольником; в) радиус основания равен $\frac{a}{2}$.

ГЛАВА 8

К § 8.1—8.3

1. 3 прямые.
2. 3 высоты.
3. Углы 1 и 2 — прямые.
4. На плоскости — одну, в пространстве — бесконечно много.
5. Только одну.
6. Нужно рассмотреть различные случаи расположения прямой a и точки B.
7. Могут.
8. а) Могут; б) не могут.
10. 12 высот.

К § 8.4

13. а) Точки A, B, C, O перейдут соответственно в точки A_1, B_1, C_1, O_1; б) точки оси l перейдут сами в себя; в) отрезки AC и OB перейдут соответственно в отрезки A_1C_1 и O_1B_1; г) четырёхугольник $OABC$ перейдёт в равный ему четырёхугольник $O_1A_1B_1C_1$.
14. а) A и A_1, B и B_1, C и C_1; б) $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, $CO = OC_1$, $CO_1 = O_1C_1$, $BO_2 = O_2B_1$, $AO_1 = O_1A_1$, $AO_2 = O_2A_1$, $CO_2 = O_2C_1$, $BO_1 = O_1B_1$; в) AA_1 и p, BB_1 и p, CC_1 и p.
15. а) Одну ось симметрии; б) в плоскости, в которой лежит отрезок, — две оси симметрии; в пространстве — бесконечно много; в) бесконечное множество осей симметрии; г) бесконечное множество осей симметрии.
20. 80°.
23. Постройте точку B_1, симметричную точке B относительно прямой l, и проведите прямую AB_1. Задача может не иметь решения.

К § 8.5—8.6

28. Точки, принадлежащие серединному перпендикуляру, одинаково удалены от концов отрезка AB.
29. а) AA_1 и BB_1; б) $AO = BO = A_1O = B_1O$, $AA_1 = BB_1$.
30. На плоскости, в которой лежит отрезок, — один серединный перпендикуляр, в пространстве — бесконечно много.
31. Это зависит от взаимного расположения отрезков.
32. Не всегда.
33. Окружность имеет центр симметрии в точке O. Осью симметрии окружности является любая прямая, которая проходит через центр окружности и лежит с ней в одной плоскости. Осью симметрии окружности будет также прямая, проходящая через её центр и перпендикулярная плоскости окружности.
34. а) Нужно рассмотреть случай, когда данная точка совпадает с центром окружности и когда не совпадает с ним; б) нужно рассмотреть случаи, когда окружности расположены произвольно и когда они являются концентрическими. Следу-

ет также рассмотреть случай, когда радиусы окружностей равны.

37. Центр симметрии — точка O. Оси симметрии — прямые, проходящие через центр сферы.

К § 8.7

44. Одну.

45. а) Не имеет; б) одну; в) три (в плоскости чертежа).

46. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, совпадает с медианой и биссектрисой.

49. а) 6 см; б) 3 см; в) 8 см.

К § 8.9—8.10

57. Прямые AC и BD перпендикулярны прямой MK; прямые AM, AD, BC и BK — наклонные.

58. PK — перпендикуляр к прямой m, PK имеет наименьшую длину.

60. Да, если все рассматриваемые фигуры лежат в одной плоскости.

61. BA и AO.

64. 5 см.

ГЛАВА 9

К § 9.1—9.4

1. а) AM, DN, CF; б) AB и BC, ME и EF.

3. Прямые на плоскости бывают пересекающимися и параллельными.

4. Центрально-симметричные прямые параллельны между собой.

5. Нужно знать, что они не имеют общих точек и лежат в одной плоскости.

6. Нет.

7. а) Да; б) не всегда; в) да.

8. Нет.

9. Эти прямые параллельны.

10. Прямые, параллельные оси l.

11. а) Будут; б) нет; в) будут; г) нет.

12. а) Нет; б) нет; в) нет.

15. 6.

К § 9.5—9.7

20. а) Две пары; б) две пары.

21. а) A и C, B и D; б) A и B, A и D, C и B, C и D.

22. Эти прямые могут лежать в одной плоскости, а могут не лежать.

23. а) Могут; б) могут; в) не могут.

24. Прямые a и b параллельны.

К § 9.8—9.9

28. а) Не может; б) не может.

29. а) Нет; б) нет; в) может быть не более трёх тупых углов.

30. $\angle C = 105°$.

31. $\angle B = 30°$.

32. а) Можно провести только одну прямую, параллельную AC; б) мы получим 3 пары равных вертикальных углов; в) $\angle 1 = 70°$, $\angle 2 = 80°$, $\angle 3 = 30°$.

33. 25°, 87°, 68°.

ГЛАВА 10

К § 10.1—10.3

1. У параллелограмма 4 вершины, 4 стороны, 4 внутренних угла, 2 диагонали.

2. На 2 треугольника.

3. Четырёхугольник не является параллелограммом.

4. Может.

5. Периметры треугольников равны.

6. В прямоугольнике диагонали равны.

7. а) Нет; б) да.

8. $CD = 5$ см, $AD = 7$ см, $P = 24$ см.

9. $b = \dfrac{p-2a}{2}$.

10. а) 13 см и 17 см; б) 13 см и 17 см; в) 7,5 см и 22,5 см; г) 11,5 см и 18,5 см; д) 7,5 см и 22,5 см.

11. а) Не могут; б) не могут; в) могут. Только один угол параллелограмма прямым быть не может.

12. 55°, 125°, 125°.

13. а) 112°, 68°, 112°, 68°; б) 36°, 144°, 36°, 144°; в) 72°, 108°, 72°, 108°.

14. 80°, 80°, 100°, 100°.
15. 30°.
18. Периметр может быть равен 10 см, 12 см или 14 см.
19. 50°, 50°, 130°, 130°.
23. 9 параллелограммов.
24. 3 параллелограмма.

К § 10.5

27. $AM = BM$, $BK = CK$.
28. $OB_1 = B_1B_2$.
31. $\frac{P}{2}$.
32. $m + n$.
41. P.

К § 10.6

43. а) Все стороны равны; б) противоположные углы равны; в) диагонали AC и BD; г) центр симметрии — точка пересечения диагоналей; д) оси симметрии — прямые, которым принадлежат диагонали ромба.
44. Нет.
45. а) Нет, если ромб — не квадрат; б) да.
48. 8.
49. 32 см.
50. 60°, 60°, 120°, 120°.
51. 80°, 80°, 100°, 100°.
54. а) $AM = 1$ см, $MD = 1$ см, $BD = 2$ см.

К § 10.7

61. BC и AD параллельны, AB и CD не параллельны.
62. На 2 треугольника.
63. $AM = MB$, $DN = NC$.
64. Трапецией является фигура г).
66. Может.
67. 6 см.
68. 180°.
69. 360°.
70. См. задачу 68.
72. $\angle BAE = \angle EAD$, $\angle BEA = \angle EAD$.
75. 6 см.
76. $\angle BEF = 70°$, $\angle CFE = 80°$.
81. 90°.
87. h^2.

ГЛАВА 11

К § 11.1—11.3

1. а) Увеличится в 4 раза; б) увеличится в 9 раз; в) уменьшится в 4 раза.
2. а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз; в) не изменится; г) увеличится в 2 раза.
3. В 6 раз.
4. Увеличится в число раз в квадрате.
5. Будут.
6. а) 204; б) $7\frac{2}{3}$; в) 15; г) 150.
7. а) 576; б) $12\frac{24}{25}$; в) 49; г) 2 116.
8. а) 6 см^2; б) 600 см^2; в) 60 000 см^2; г) 6 м^2.
9. 24 см^2 и 40 см^2.
10. в) $5a$.
11. 5 см.
12. а) 12 см; б) 13 м; в) 20 мм.
13. 20 м.
14. 20 см.
17. а) $a = 5$ см; б) $a = 10$ см; в) $a = 6$ см; г) $a = 12$ см.
18. Воспользуйтесь формулами: $S_{\text{б. п. куба}} = 4a^2$ и $S_{\text{п. п. куба}} = 6a^2$.
24. а) Четырёхугольник $MNOP$ является квадратом, площадь которого равна $\frac{1}{5}$ площади квадрата $ABCD$; б) Четырёхугольник $QRST$ является квадратом, площадь которого равна $\frac{2}{9}$ площади квадрата $ABCD$.

К § 11.4

27. а) Три разные высоты; б) две разные высоты; в) три одинаковые высоты.
28. Можно.
30. а) 14 см^2; б) 21 дм^2.
31. 3 см.
34. а) 6; б) 16/9; в) 12/5.
37. а) 2 080; б) 1 250.
38. а) Да; б) да; в) нет.

К § 11.5

45. 120 см².

47. 4 см.

48. 8,2 см и 4,1 см.

49. 10/3 см. Одно решение.

52. 56 см².

54. 20 см.

К § 11.6

57. Можно.

58. Можно.

59. 210 см².

60. 336 см².

61. 10,8 дм².

62. а) ≈ 712,8 мм²; б) ≈ 664,7 мм²; в) ≈ 326,8 мм².

К § 11.7

69. а) Увеличится в 8 раз; б) уменьшится в 27 раз; в) уменьшится в 8 раз.

70. На 30 301 см³.

71. 140 см³.

72. 27 л.

73. 3 см.

74. 6 дм и 9 дм.

75. 42 болванки.

76. 961 шт. кирпича.

77. Да, можно поднять не более 13 таких болванок.

78. Не обязательно.

ГЛАВА 12

К § 12.1—12.2

1. а) Точки A, B и C перейдут соответственно в точки A_1, B_1 и C_1; б) сохранятся расстояния между соответствующими точками, в частности $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$; в) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. а) $AA_1 = BB_1$; б) лучи AA_1 и BB_1 сонаправленные.

3. а) Существует; б) существует.

4. а) Существует; б) существует; в) существует.

5. Могут.

12. Не всегда.

ГЛАВА 13

К § 13.1—13.3

1. а) 6; б) 4; в) 3.

2. а) $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1}$; б) $\overline{DD_1} = \overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$; в) $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$.

4. Можно.

5. Нельзя.

6. Вершины треугольной пирамиды не могут задавать равные векторы.

7. Могут.

К § 13.4—13.5

14. $\overline{AC}$.

15. $\overline{AD}$.

16. $\overline{AD}$.

18. Их сумма должна быть нулевым вектором.

20. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

21. а) $\overline{AD}$; б) $\overline{MT}$; в) $\overline{DB} + \overline{PQ}$; г) $\overline{AK}$; д) $\overline{0}$.

К § 13.7

25. $\overline{BA}$.

26. $\overline{BA}$.

27. $\overline{AC} - \overline{AB}$.

28. $\overline{n} = \overline{d} - \overline{m}$ или $\overline{m} = \overline{d} - \overline{n}$.

29. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ должны быть коллинеарны.

30. Может.

33. а) $\overline{OE} + \overline{KB}$; б) $\overline{AK}$.

К § 13.8

38. Направления векторов совпадают, а отношение их длин равно 3.

39. Если $k > 0$, то векторы сонаправлены, если $k < 0$, то они противоположно направлены.

42. $\frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AB}$.

44. $\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$.

ГЛАВА 14

К § 14.1

1. а) Углы этих треугольников равны; б) отношения сходственных сторон равны.

2. Да, коэффициент подобия равен 1.

3. Не обязательно. Равны, если коэффициент подобия равен 1.

4. Нужно длину сторон меньшего треугольника умножить на 1,6.

5. $x = 5{,}25$, $y = 7{,}5$.

6. Коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$.

К § 14.2—14.3

9. Подобны.

10. Подобны.

11. Подобны.

12. а) Подобны; б) не всегда.

14. 3 пары подобных треугольников.

15. 6 пар подобных треугольников.

16. а) 4 треугольника, подобных данному; б) 10 пар подобных треугольников.

18. Будут.

К § 14.4

23. Нужно найти отношение длин его соответственных сторон.

25. а) Увеличится в n^2 раз; б) уменьшится в k^2 раз.

26. а) 1 : 4; б) 4 : 9; в) 2 : 3; г) 1 : 2,25; д) $k^2 : l^2$.

27. а) 2 : 3; б) $\sqrt{3} : 2$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\sqrt{p} : \sqrt{t}$.

30. 60 см и 100 см.

31. 72 см.

32. $\left(\frac{ah}{a+h}\right)^2$. а) 3 600/289 см$^2 \approx 12{,}5$ см^2; б) 9 см^2; в) 100 дм^2.

ГЛАВА 15

К § 15.1—15.3

1. а) Точка A перейдёт в точку A', B — в B', C — в C', D — в D', A_1 — в A'_1, B_1 — в B'_1, C_1 — в C'_1, D_1 — в D'_1; б) например, отношение всех рёбер кубов $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ равно k; в) прямая AB перейдёт в прямую $A'B'$, AC — в $A'C'$, AA_1 — в $A'A'_1$, BB_1 — в $B'B'_1$.

2. а) В угол; б) в параллелограмм; в) в трапецию.

3. Если кругов не совпадают, а радиусы одинаковы, то один. Если центры кругов не совпадают, а радиусы различны, то два. Если центры кругов совпадают, а радиусы различны, то один.

6. а) Нельзя; б) можно.

7. Можно.

8. Сохраняется.

ГЛАВА 16

К § 16.1

1. Две дуги, одну хорду, два центральных угла.

2. а) 180°; б) 90°.

4. 1 : 5.

5. Например, $\angle BOC$ и $\angle DOA$.

6. $\smile AB = 60°$, $\smile AC = 120°$, $\smile ACB = 300°$.

К § 16.2—16.3

8. а) (0; 1); б) (−1; 0); в) (0; −1); г) (−1; 0); д) (1; 0); е) (0; 1).

9. Нет.

10. а) Нет; б) нет.

11. $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin(-90°) = -1$, $\cos(-90°) = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\sin(-180°) = 0$, $\cos(-180°) = -1$, $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\sin(-270°) = 1$, $\cos(-270°) = 0$.

14. $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

Для нахождения синусов и косинусов отрицательных углов можно использовать формулы $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

15. а) 0,8; б) −0,28; в) 0,6; г) $-2\frac{\sqrt{2}}{3}$.

16. а) $2\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}943$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0,8;
г) $\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}745$.

К § 16.4

18. 0.
19. 0.
20. Например, 90°.
21. Например, 0°.
22. а) $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$;
б) $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{ctg} 45° = 1$;
в) $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
г) $\operatorname{tg}(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\operatorname{ctg}(-30°) = -\sqrt{3}$; д) $\operatorname{tg}(-45°) = -1$,
$\operatorname{ctg}(-45°) = -1$; е) $\operatorname{tg}(-60°) = -\sqrt{3}$,
$\operatorname{ctg}(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
25. Воспользуйтесь тем, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
и $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
28. Пусть α и β — углы, которые образуют диагонали прямоугольника с его сторонами. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{12}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{7}$.
29. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, где α — рассматриваемый острый угол.

ГЛАВА 17

К § 17.1

1. Будет.
2. Будет увеличиваться.
7. а) $c \approx 8{,}45$; б) $b \approx 4{,}42$;
в) $a \approx 0{,}75$.
9. а) ≈ 117°17′; б) ≈ 93°42.
10. ≈ 275 H; ≈ 15°57′; ≈ 34°03′.

К § 17.2

13. При возрастании угла γ от 0° до 90° площадь треугольника возрастает. При дальнейшем возрастании угла γ от 90° до 180° площадь треугольника убывает. Наибольшее значение площади при γ = 90°.
14. 48,4 м^2.
15. а) ≈ 7 880 м^2; б) ≈ 344 см^2.
18. а) ≈ 21,2 см^2; б) ≈ 2,7 см^2.

К § 17.3

21. а) $b \approx 61$, $c \approx 102$, $\angle A = 79°37'$;
б) $a \approx 39$, $b \approx 25$, $\angle C = 14°20'$;
в) $c \approx 21$, $\angle B = 36°52'$,
$\angle C = 75°45'$, г) $c \approx 29$,
$\angle A = 14°23'$, $\angle B = 114°17'$.
22. 29°23′.
24. Каждое из отношений равно длине гипотенузы.
25. $\sqrt{3} : 1 : 1$.
27. $\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
28. 86 м.

ГЛАВА 18

К § 18.1

1. а) $\angle BAC$.
2. а) $\angle ABC$ опирается на дугу ADC, $\angle BCA$ — на дугу AB, $\angle CAD$ — на дугу DC; б) на дугу BC опирается $\angle BAC$, на дугу BCD — $\angle BAD$.
8. 70° и 35°.
9. 80° или 100°.
11. 108°, 252°.

К § 18.2

13. Вершины A, B и C треугольника ABC принадлежат окружности. Стороны AB, BC и AC являются хордами окружности. Углы A, B и C треугольника ABC являются углами, вписанными в окружность.
15. Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
18. 4 см.
19. $h/3$.
20. $10\sqrt{2}$ см.

К § 18.3

25. Вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности, стороны четырёхугольника являются хордами окружности, углы четырёхугольника являются вписанными в окружность.

26. Главным свойством сторон является то, что суммы противоположных сторон этого четырёхугольника равны.

27. а) Нет; б) да; в) да.

37. 5 см, 5 см. Указание: докажите, что точки B, C, M, N лежат на одной окружности, диаметром которой является отрезок ВС.

ГЛАВА 19

К § 19.1

1. а) Внутренние углы: 60° (для $n = 3$), 90° (для $n = 4$), 108° (для $n = 5$), 120° (для $n = 6$), 135° (для $n = 8$), 144° (для $n = 10$), 150° (для $n = 12$); б) внешние углы соответственно: 120°, 90°, 72°, 60°, 45°, 36°, 30°.

2. 1) а) 8; б) 12; в) 9;
2) а) 10; б) 15; в) 6.

8. n осей симметрии.

9. n поворотов, включая тождественный.

10. Центры симметрии имеют правильные многоугольники с чётным числом сторон.

К § 19.3

11. $\frac{a_3\sqrt{3}}{3}$; $\frac{a_4\sqrt{3}}{2}$; a_6.

12. $3\sqrt{6}$ см $\approx 7{,}3$ см.

13. а) $48\sqrt{3}$ см$^2 \approx 83{,}14$ см^2; б) 128 см^2; в) $96\sqrt{3}$ см$^2 \approx 166{,}28$ см^2.

15. $\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}$.

16. а) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.

17. а) $10\sqrt{2}$ мм $\approx 14{,}1$ мм;
б) $4\sqrt{2}$ мм $\approx 5{,}7$ мм.

18. а) $8\sqrt{3}$ мм $\approx 13{,}8$ мм;
б) $6\sqrt{3}$ мм $\approx 10{,}4$ мм.

19. $R\sqrt{3}$ см; а) $2\sqrt{3}$ см $\approx 3{,}46$ см;
б) $3\sqrt{3}$ см $\approx 5{,}20$ см.

К § 19.4

20. а) 6; б) 6,3; в) 6,28; г) 6,283.

21. а) Увеличится в n раз; б) уменьшится в n раз.

22. а) $\approx 78{,}54$ см; б) $\approx 37{,}70$ дм.

23. а) $\approx 12{,}49$ см; б) $\approx 1{,}98$ дм.

24. $\frac{1}{2}$.

25. 280π млн км.

28. Колесо в секунду проходит 720π см.

30. 8π см.

32. 360π см.

К § 19.5

34. а) Площадь уменьшится в 16 раз, длина окружности — в 4 раза; б) площадь увеличится в 9 раз, длина окружности — в 3 раза.

35. а) 4π см$^2 \approx 12{,}57$ см^2;
б) 25π м$^2 \approx 78{,}54$ м^2.

36. $\frac{C^2}{4\pi}$.

37. а) $\frac{4}{\pi}$; б) π; в) 25π.

38. а) $\frac{9\pi}{4}$ мм$^2 \approx 7{,}1$ мм^2;
б) $\frac{\pi}{100}$ мм$^2 \approx 0{,}03$ мм^2.

39. а) $\frac{1936}{\pi}$ см$^2 \approx 616$ см^2;
б) $\frac{400}{\pi}$ см$^2 \approx 127$ см^2.

40. 4π см^2.

41. $\frac{416{,}16}{\pi}$ м$^2 \approx 132{,}47$ м^2.

42. $\frac{256}{81} \approx 3{,}16$.

УКАЗАТЕЛЬ АКСИОМ

А.1 (аксиома прямой).	Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.	10
А.2 (аксиома плоскости).	Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.	11
А.3 (аксиома прямой и плоскости).	Прямая, проходящая через две точки плоскости, лежит в этой плоскости.	11
А.4 (аксиома расстояния).	Для любых двух точек A и B пространства однозначно определено некоторое неотрицательное число AB, называемое расстоянием между ними и обладающее следующими свойствами: 1) $AB = BA$; 2) $AB = 0$ тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают; 3) $AC = AB + BC$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда точка B лежит на отрезке AC.	12
А.5 (аксиома параллельных).	Через любую точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.	125

УКАЗАТЕЛЬ ТЕОРЕМ

Т.56	Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований и высоты: $S_{\text{трап.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — основания трапеции, h — высота.	177
Т.57	Параллельный перенос является изометрией.	191
Т.58	Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется переместительный закон (коммутативность сложения векторов): $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.	201
Т.59	Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ выполняется сочетательный закон (ассоциативность сложения векторов): $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.	202
Т.60	**(о коллинеарности векторов).** Вектор $\overline{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\overline{a}$ тогда и только тогда, когда $\overline{b} = x\overline{a}$ для некоторого числа x.	207
Т.61	Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два неколлинеарных вектора, лежащих в некоторой плоскости. Тогда для любого вектора $\overline{d}$, лежащего в этой плоскости, существует единственная пара чисел x и y, такая, что $\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b}$.	209
Т.62	**(лемма о подобии треугольников).** Прямая, пересекающая две стороны треугольника и проведённая параллельно третьей стороне, отсекает треугольник, подобный данному.	221
Т.63	**(первый признак подобия — по двум углам).** Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого.	223
Т.64	**(второй признак подобия — по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними).** Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, лежащие между ними, равны.	226
Т.65	**(третий признак подобия — по пропорциональности трёх сторон).** Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника.	228
Т.66	Отношение периметров подобных многоугольников равно отношению их соответственных сторон (коэффициенту подобия).	228
Т.67	Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.	228
Т.68	Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.	229
Т.69	Если при гомотетии с центром O и коэффициентом k точки X и Y переходят в точки X_1 и Y_1, то $\overline{X_1Y_1} = k\ \overline{XY}$.	236
Т.70	Синус и косинус одного и того же острого угла связаны между собой основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$.	246
Т.71	Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.	252

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

O.28 Сферой называется множество всех точек пространства, удалённых от данной точки на заданное положительное расстояние. При этом данная точка называется центром сферы, а данное расстояние — её радиусом. 56

O.29 Два треугольника называются равными, если стороны одного соответственно равны сторонам другого и углы, заключённые между соответственно равными сторонами, равны. 60

O.30 Поворотом плоской фигуры Ф вокруг точки O на данный угол α ($0° < \alpha \leqslant 180°$) в данном направлении называется такое преобразование, при котором каждой точке X фигуры Ф сопоставляется такая точка X_1, что: а) $OX = OX_1$; б) $\angle X_1OX = \alpha$; в) луч OX_1 откладывается от луча OX в заданном направлении.

Точка O называется центром поворота, а угол α — углом поворота. 73

O.31 Две точки A и A_1 в пространстве называются симметричными относительно точки O, если точка O — середина отрезка AA_1. Точка O называется центром симметрии точек A и A_1. Точка O считается симметричной самой себе. 75

O.32 Центральной симметрией с центром в точке O называется такое преобразование, при котором каждая точка пространства переходит в симметричную ей относительно точки O точку. Точка O называется центром симметрии. 75

O.33 Геометрические преобразования, сохраняющие расстояния между парами соответствующих точек, называются изометриями. 76

O.34 Если две прямые имеют только одну общую точку, то они называются пересекающимися. 84

O.35 Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла. 85

O.36 Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом. 91

O.37 Перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой a, называется отрезок прямой, перпендикулярной к прямой a, с концами в точках A и B, где A — точка, из которой проводится перпендикуляр, B — точка пересечения прямой a с перпендикулярной ей прямой AB. 92

O.38 Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника. 96

О.39 Точки A и A_1 называются симметричными относительно некоторой прямой p, если эта прямая p перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину. Прямая p называется осью симметрии точек A и A_1. Каждая точка оси симметрии считается симметричной самой себе. 98

О.40 Осевой симметрией с осью l называется такое преобразование, при котором каждая точка переходит в симметричную ей относительно оси l точку. 99

О.41 Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проведённая через середину этого отрезка перпендикулярно ему. 101

О.42 Прямая, пересекающая прямую p и не перпендикулярная ей, называется наклонной к прямой p. 109

О.43 Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а общая точка прямой и окружности — точкой касания. 111

О.44 Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. 120

О.45 Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, т.е. лежат на параллельных прямых. 143

О.46 Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. 151

О.47 Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. 154

О.48 Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны. 154

О.49 Параллелограмм, все стороны которого равны, называется ромбом. 154

О.50 Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие непараллельны, называется трапецией. 155

О.51 Трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной. 155

О.52 Трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной. 156

О.53 Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется средней линией трапеции. 156

О.54 Две фигуры называются равновеликими, если они имеют одинаковую площадь. 169

О.55	Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на прямую, содержащую противоположную сторону.	175
О.56	Высотой трапеции называется общий перпендикуляр к её основаниям (или прямым, содержащим её основания).	177
О.57	Преобразование, при котором каждая точка фигуры Ф переходит в одном направлении (по сонаправленным лучам) на одно и то же расстояние, называется параллельным переносом.	190
О.58	Два вектора называют коллинеарными, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.	198
О.59	Три вектора называют компланарными, если изображающие их направленные отрезки лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.	198
О.60	Вектор $\overline{AB}$ равен вектору $\overline{CD}$, если длины отрезков AB и CD равны и эти векторы одинаково направлены (сонаправлены).	199
О.61	Длиной вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB.	199
О.62	Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называется нулевым.	200
О.63	Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, что $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$.	205
О.64	Два вектора называются противоположными, если они противоположно направлены и имеют одинаковую длину.	205
О.65	Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число x $(x \neq 0)$ называется такой вектор $x\overline{a}$, который: 1) имеет длину $\lvert x \rvert \cdot \lvert \overline{a} \rvert$; 2) сонаправлен с вектором $\overline{a}$, если $x > 0$, и направлен противоположно вектору $\overline{a}$, если $x < 0$.	206
О.66	Два треугольника называются подобными, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого, а сходственные стороны пропорциональны.	220
О.67	Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется геометрическое преобразование, при котором каждая точка X переходит в точку X_1, такую, что $\overline{OX_1} = k\,\overline{OX}$.	235

О.68 Геометрическое преобразование, при котором расстояние между соответствующими точками изменяется в одно и то же число раз, называется преобразованием подобия. 237

О.69 Угол с вершиной в центре окружности называется её центральным углом. 242

О.70 Пересечение окружности и её центрального угла называется дугой окружности. 242

О.71 Угловой величиной дуги окружности называется величина соответствующего центрального угла. 243

О.72 Пересечение круга и его центрального угла называется сектором круга. 243

О.73 Ордината точки P_α, принадлежащей единичной окружности, называется синусом угла α. 244

О.74 Абсцисса точки P_α, принадлежащей единичной окружности, называется косинусом угла α. 244

О.75 Тангенсом угла α называется отношение $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$. 247

О.76 Котангенсом угла α называется отношение $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$. 247

О.77 Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают её, называется вписанным углом. 260

О.78 Если вершины треугольника лежат на окружности, то этот треугольник называется вписанным в окружность, а окружность — описанной около этого треугольника. 263

О.79 Треугольник, все стороны которого касаются окружности, называется описанным около этой окружности, а окружность — вписанной в этот треугольник. 264

ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 8. Перпендикулярные прямые

Глава 9. Параллельные прямые

Глава 10. Параллелограмм, ромб, трапеция

Глава 11. Площади и объёмы

Козлова Светлана Александровна
Рубин Александр Григорьевич
Гусев Валерий Александрович

Геометрия
Учебник для 7–9 классов

Подписано в печать 22.06.12. Формат 70x90/16.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Объём 20 п.л. Тираж 5000 экз. Заказ № 32135 ([illegible]).

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 953005 – литература учебная

Издательство «Баласс». 109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1
Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»
Телефоны для справок: (495) 368-70-54, 672-23-12, 672-23-34
http://www.school2100.ru E-mail: balass.izd@mtu-net.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат»
214020 Смоленск, ул. Смольянинова, д. 1.

9 785859 399215

УМК
Образовательной системы
«Школа 2100»
обеспечивает образовательный результат в соответствии с ФГОС через методический аппарат и систему заданий по формированию универсальных учебных действий

Это позволит каждому научиться

1. **Решать разные возникающие в жизни задачи.**
   Главное не знания, а умение ими пользоваться!
2. **Самостоятельно открывать новое.**
   Не надо зубрить и всегда искать готовые ответы!
3. **Выбирать главное и интересное.**
   Не всё, что есть в учебнике, надо запомнить или выполнить!

НЕПРЕРЫВНЫЙ КУРС «МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА» НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА

КУРС «МАТЕМАТИКА»

(авт. Т.Е. Демидова, С.А. Козлова, А.П. Тонких и др.)


1 кл.


2 кл.


3 кл.

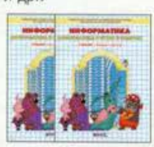

4 кл.

КУРС «ИНФОРМАТИКА»

(авт. А.В. Горячев и др.)


1 кл.


2 кл.


3 кл.


4 кл.

ОСНОВНАЯ ШКОЛА

КУРС «МАТЕМАТИКА»

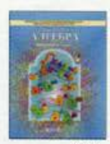
(авт. С.А. Козлова, А.Г. Рубин)


5 кл.


6 кл.

КУРС «АЛГЕБРА»

(авт. А.Г. Рубин, П.В. Чулков)


7 кл.